• $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$

(1°) $D_f = \mathbb{R}$

(2°) п/н. —

(3°) НУЛЕ: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

ЗНАК: $\quad + \quad \underset{1}{\bullet} \quad -$

(4°) АСИМПТОТЕ:

$$f(x) = x^{2/3} \cdot (1-x)^{1/3} = x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/3} = -x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3} \qquad x \to \pm\infty$$

$$= -x \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x} + \underbrace{\binom{1/3}{2}}_{= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3}}{2}} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \underline{-x + \frac{1}{3}} + \frac{1}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\boxed{y = -x + 1/3 \ \text{к. А.}\ x \to \pm\infty}$

$x \to +\infty$: Γ_f је изнад

$x \to -\infty$: Γ_f је испод

(5°) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x^2 - x^3)^{2/3}} \cdot (2x - 3x^2)$, $x \neq 0, 1$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x \cdot (2-3x)}{x^{4/3} \cdot (1-x)^{2/3}} = \frac{1}{3} \frac{(2-3x)}{x^{1/3} \underbrace{(1-x)^{2/3}}_{>0}}, \quad x \neq 0, 1$$

f': $\quad - \quad \underset{0}{\bullet} \quad + \quad \underset{2/3}{\bullet} \quad - \quad \underset{1}{\bullet} \quad -$

$\quad \searrow \qquad \nearrow \qquad \searrow \qquad \searrow$

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(2-3x)^{\to -1}}{3 \underset{\downarrow 1}{x^{1/3}} \underset{\to 0_{+/-}}{(1-x)^{2/3}}}_{\to 0_+} = -\infty \quad \Rightarrow \text{уз ину}$$

(радили смо истовремено 1+/- јер видимо да нам иде на 2/3 ☺)

$$\lim_{x \to 0_+} f'(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{2 - 3x^{\to 2}}{3 \underset{\to 0_+}{x^{1/3}} \underset{\to 1}{(1-x)^{2/3}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0_-} f'(x) = -\infty$$

уз:

(6°)
$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3) \cdot x^{1/3}(1-x)^{2/3} - (2-3x) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x(1-x)^2)^{2/3}} \cdot \overbrace{(1-4x+3x^2)}^{(1-x)(1-3x)}}{x^{2/3}(1-x)^{4/3}}$$

$x^{1/3}(1-x)^{2/3} = \sqrt[3]{\underbrace{x(1-x)^2}_{x - 2x^2 + x^3}}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}(1-x)^{4/3}} \cdot \left(\frac{(-3)\, x(1-x)}{x^{2/3}(1-x)^{1/3}} - \frac{2-3x}{\underline{\underline{3}}} \cdot \frac{1-3x}{x^{2/3}(1-x)^{1/3}} \right)$$

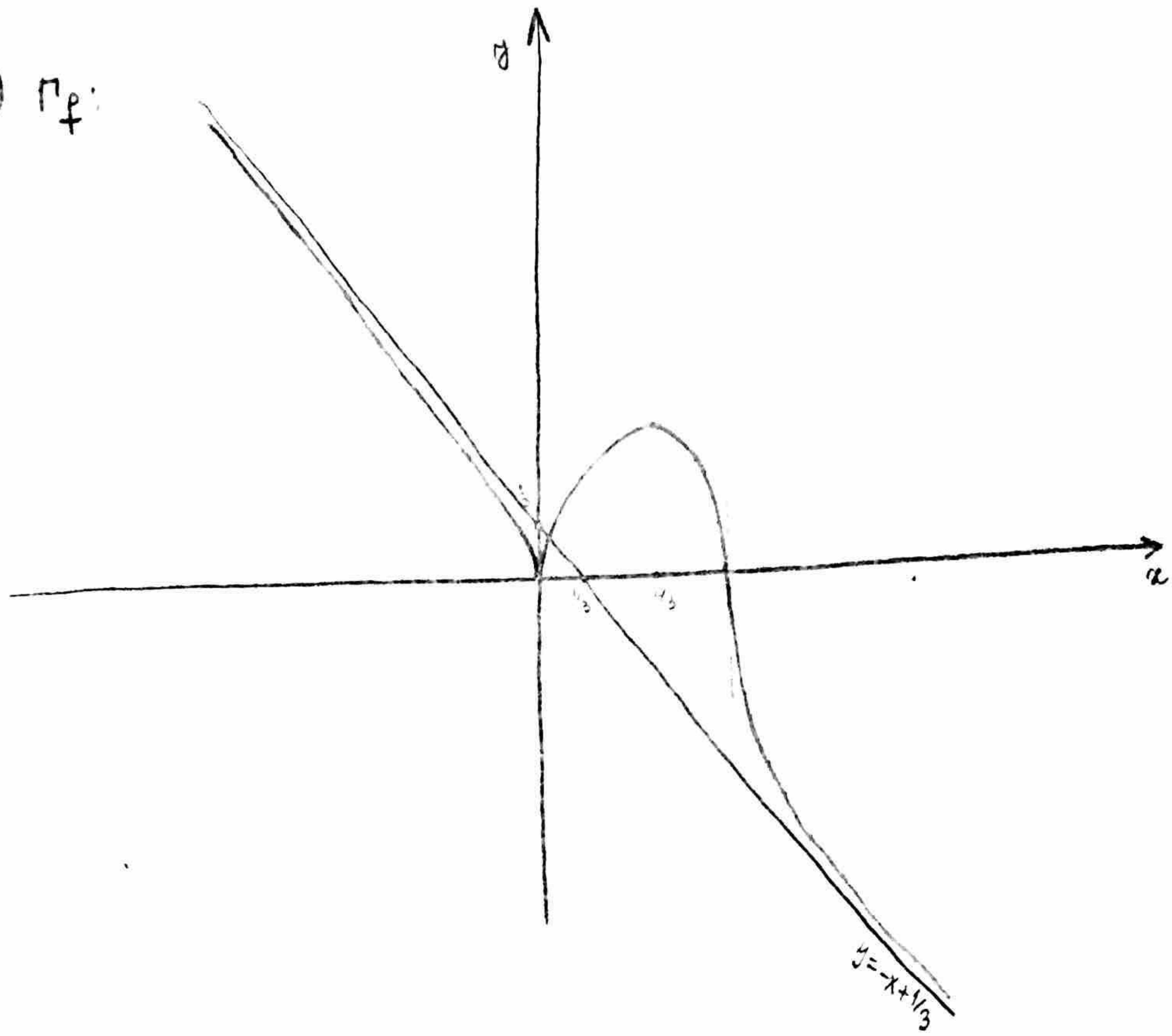
$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x^{4/3}(1-x)^{5/3}} \cdot \left(-9x + 9x^2 - 2 - 9x^2 + 8x \right) = \frac{-2}{9\,(1-x)^{5/3}\, x^{4/3}}, \quad x \neq 0, 1$$

$$f''(x) = \frac{-2}{9} \cdot \frac{1}{x^{4/3}(1-x)^{5/3}}, \quad x \neq 0, 1:$$

f''	$-$	0	$-$	1	$+$
f	$\frown$		$\frown$		$\smile$

Нема превојних тачака [illegible] ??

⑦ Γ_f:



Примене код разних задатака испитивања функција
(неједнакости, нуле, ...)

- Док. да једначина $\ln x = \frac{1}{x^2}$ има јединствено решење.

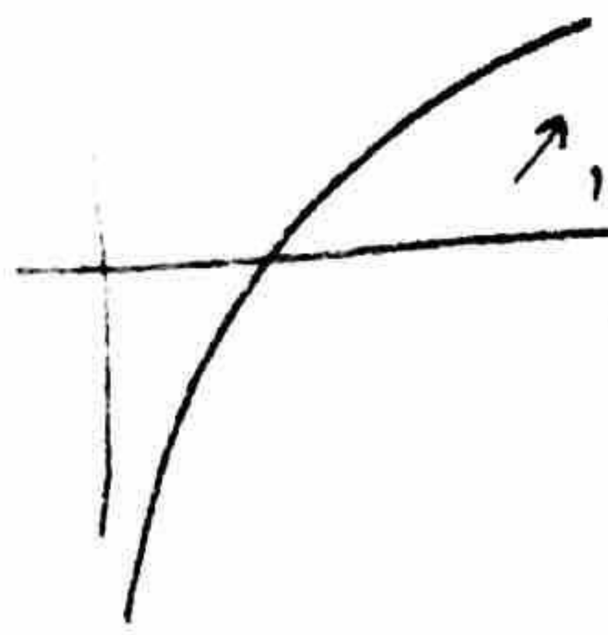
$\Leftrightarrow \underbrace{\ln x - \frac{1}{x^2}}_{f(x)}$ има јединствену нулу

$D_f = (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x^3} > 0 \Rightarrow f \nearrow$

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} (\underbrace{\ln x}_{\downarrow\, -\infty} - \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\downarrow\, +\infty}) = -\infty$ $\quad -\infty + -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$



$\nearrow$, непр., од $-\infty$ до $+\infty$

$\Rightarrow$ $\exists 1$ нула!

- $a^2 - 3b < 0$

Док. да $\underbrace{x^3 + ax^2 + bx + c}_{f(x)} = 0$ има тачно 1 реалан корен

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$D = 4a^2 - 12b < 0$ из услова $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ $\quad -\infty \xrightarrow{\text{непр}} +\infty$ $\Rightarrow$ $\exists 1$ реалан корен

- Док. да за $\forall x \geq 0$ важи:

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x} \geq \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{3(x+1)^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{3(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\left(5\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\cancel{3}(x+1)^{\cancel{2}} - \sqrt{x}(5x+3)\cdot\cancel{3}\cdot 2\cancel{(x+1)}}{{}_3\cancel{9}(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3(x+1)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left[\left(\frac{15}{2}x + \frac{3}{2}\right)(x+1) - 2x(5x+3)\right]$$

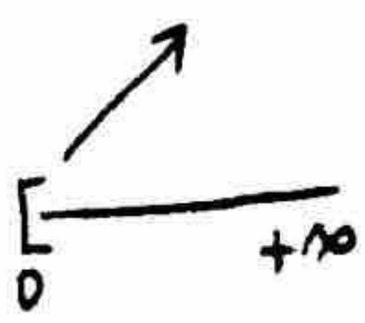
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{3(1+x)^3}\cdot\left[3(1+x)^2 - \left[(15x+3)(x+1) - 4x(5x+3)\right]\right]$$

скраћује се

$$= \frac{1}{6\sqrt{x}(x+1)^3}\cdot\left[3x^2 + 3 + 6x - [\cancel{15x^2} + \underbrace{\cancel{18x}}_{6x} + 3 - \underbrace{20x^2}_{-5x^2} - 12x]\right]$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{x}(x+1)^3}\cdot 8x^2 = \frac{4x^2}{3\sqrt{x}(x+1)^3}$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ на $[0, +\infty)$
$\quad\quad > 0 \quad (0, +\infty)$ $\Rightarrow$



$f(0) = 0 \Rightarrow \underset{>0}{f(x)} > 0, \underset{>0}{x} > 0$!

∎

• Одредити број решења једначине:

$$e^x = ax^2$$
$$a=5$$

$e^x = 5x^2$

уочимо $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ($x=0$ очигледно није решење !)

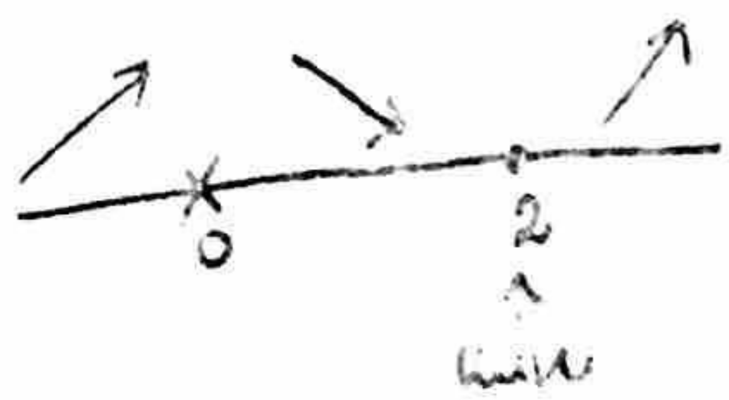
желимо $x_0 = ?$ $f(x_0)=5$

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2} - 2\frac{e^x}{x^3} = \frac{e^x}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{>0}\cdot\frac{x-2}{x}$$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) > 0$ на $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

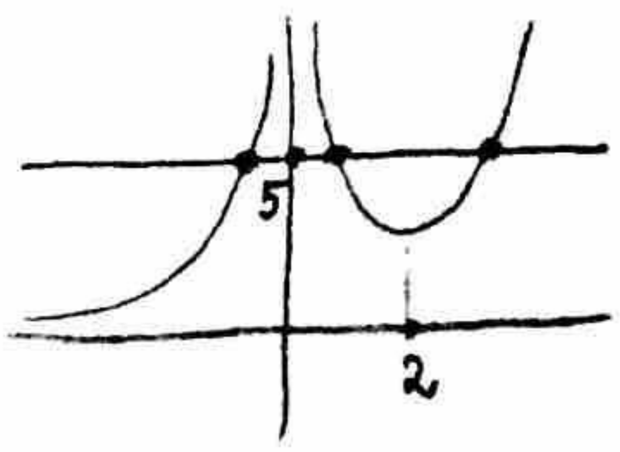
$f'(x) < 0$ на $(0,2)$



$\lim\limits_{x\to 0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} = 0$ - (e^x јачи ☺)



- отприлике

$f(2) = \frac{e^2}{4} < 5$

$\Rightarrow$ 3 решења једн. $f(x)=5$ □

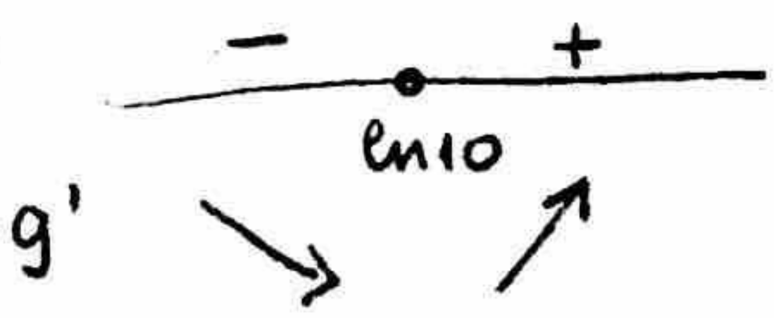
II начин: да смо кренули са $\underline{g(x) = e^x - 5x^2}$ па да тражимо нуле:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (e^x јаче или: $g(x) = \underbrace{5x^2}_{\to+\infty}\cdot\left(\underbrace{\frac{e^x}{5x^2}}_{\to+\infty} - 1\right) \to +\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} - 5x^2 = -\infty$

$g'(x) = e^x - 10x$ - па није лепо да знамо где >0, где <0 ☹ ↑ зато је лепши горњи начин

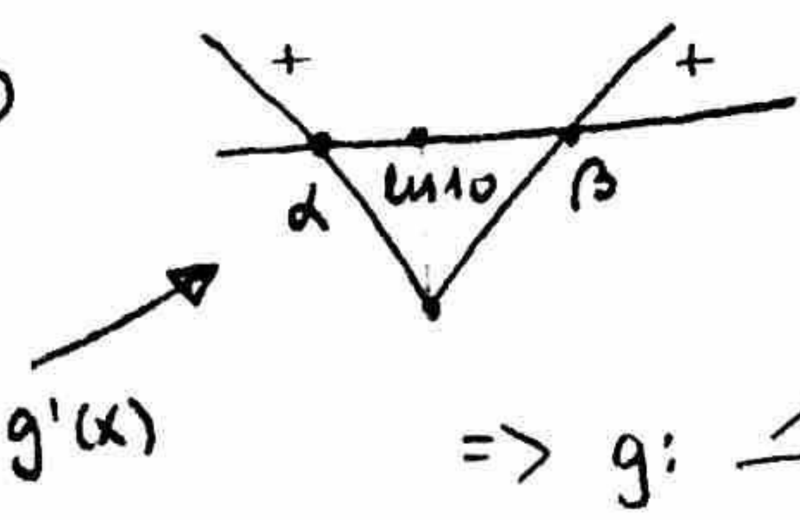
$g''(x) = e^x - 10$



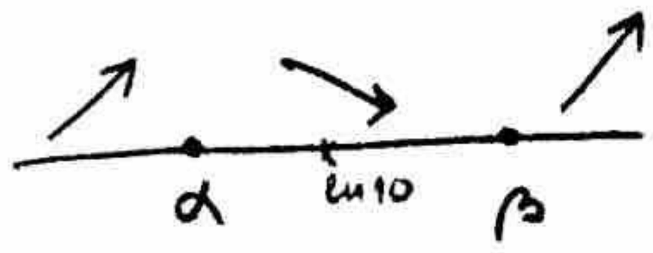
$g'(\ln 10) = 10 - 10\underbrace{\ln 10}_{>1} < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) = +\infty$



$\Rightarrow g:$



$g(\alpha)$
$g(\beta)$ ☹

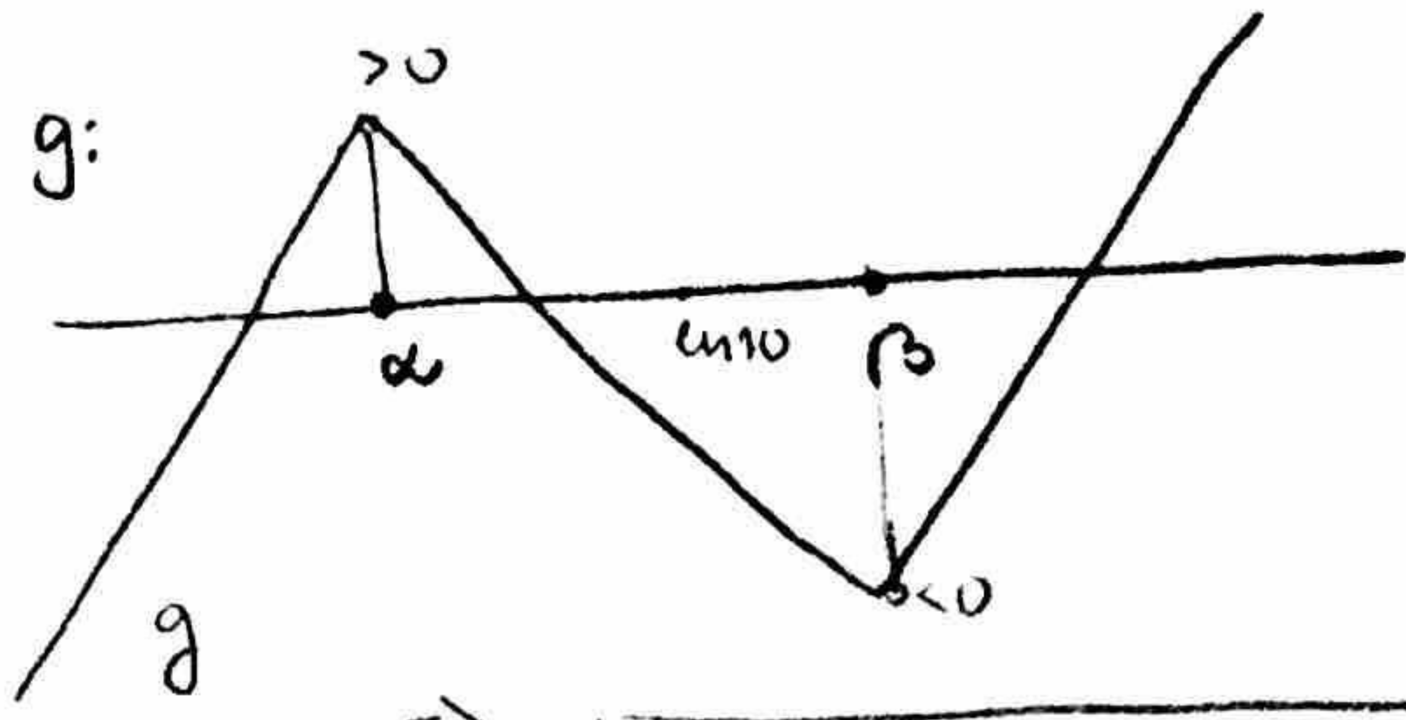
треба пок. да $g(\alpha) > 0$
$g(\beta) < 0$

$\alpha < \ln 10 < \beta$

$g(\ln 10) = 10 - 5\underbrace{(\ln 10)^2}_{>2} < 0$ $\Rightarrow \boxed{g(\beta) < 0}$

пошто је $\alpha < \ln 10$ и max на $(-\infty, \ln 10)$, довољно је наћи једну вредност $< \ln 10$
у којој је $g > 0$ па и $g(\alpha) > 0$ ☺ $g(0) = 1$, $0 < \ln 10$ $\Rightarrow g(\alpha) > 0$

$\Rightarrow$ g:



$\Rightarrow$ $\boxed{g=0 \text{ у 3 тачке}}$

Али много је бољи први начин!!! ▫

• $\underbrace{x^3-6x^2+9x-10}_{f(x)}=0$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$

$x=1,3$

f': $+$ (1) $-$ (3) $+$

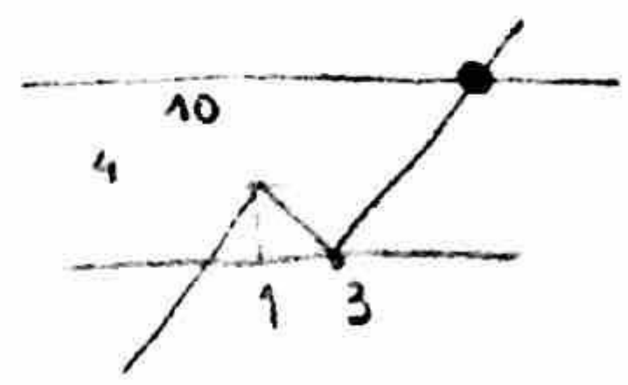
f: $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(1)=4$

$f(3)=0$



$\Rightarrow$ $\exists 1\, x_0,\ f(x_0)=10$ ▫

• $f(x)=\dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$ $0<a<b$ док. да је f растућа на $(0,+\infty)$:

$$f'(x)=\frac{1}{(\ln(bx+1))^2}\cdot\left(\frac{a}{ax+1}\ln(bx+1)-\frac{b}{bx+1}\ln(ax+1)\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{(ax+1)(bx+1)(\ln(bx+1))^2}}_{>0 \text{ на } (0,+\infty)}\cdot\underbrace{(a(bx+1)\ln(bx+1)-b(ax+1)\ln(ax+1))}_{g(x)}$$

$$g'(x)=ab\ln(bx+1)+\underbrace{a(bx+1)\frac{b}{bx+1}}_{ab}-ba\ln(ax+1)-\underbrace{b\cancel{(ax+1)}\frac{a}{\cancel{ax+1}}}_{-ab}=$$

$$=ab\ln\underbrace{\frac{bx+1}{ax+1}}_{>1 \text{ јер } b>a}$$

$\underbrace{g'(x)>0,\ \forall x\in(0,+\infty)}_{\nearrow (0,+\infty)}$, а g непр. на $[0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $g(x)>\underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(0)}}$, $x\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $g(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $f \nearrow$ на $(0,+\infty)$ ▫