The Square Peg Problem:

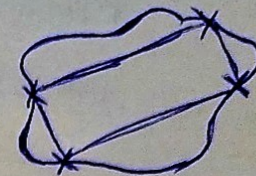
O. Toeplitz, 1911.: Given a Jordan curve (a homeomorph of a circle) in the plane, are there 4 points on the curve that form a square?

Још увек отворено, одговор дат (ДА) за глатке Жорданове криве, и разне друге случајеве.

Ми доказујемо:

$\boxed{T}$ $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ Жорданова крива

Тада $\exists$ 4 тачке на γ које формирају правоугаоник.



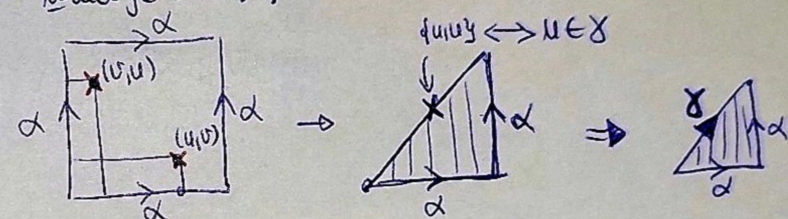
γ је утапање кружнице у $\mathbb{R}^2$

знамо да је област коју γ ограничава хомеоморфна диску.

Посматрајмо скуп: $M(\gamma) = \{\{u,v\} \mid u,v \in \gamma\} = \gamma \times_{\Sigma_2} \gamma$ ← symmetric product of γ

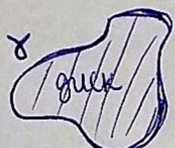
$\gamma \approx S^1 \Rightarrow M(\gamma) \approx M(S^1)$

шта је $M(S^1)$?

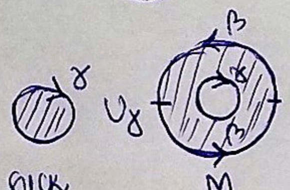


$\Rightarrow M(\gamma) \approx M$ - Мебијусова трака

Гранична кружница те M одговара γ ☺



+ уочимо $M(\gamma) \cup_\gamma$ диск (залепљено по граници, граница $M(\gamma) = \gamma$ на границу диска $= \gamma$)



← Када погледамо овај модел Мебијусове траке, видимо да је $M(\gamma) \cup_\gamma$ диск $\approx \mathbb{R}P^2$

Посматрајмо пресликавање:

$F: M(\gamma) \cup_\gamma \text{диск} \to \mathbb{R}^3$

$F|_{\text{диск}}$ = утапање диска у $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

$F|_{M(\gamma)}: \{u,v\} \mapsto \Big(\underbrace{\tfrac{u+v}{2}}_{\in \mathbb{R}^2}, \underbrace{\|u-v\|}_{\in \mathbb{R}}\Big)$

добро деф. на пресеку: $\{u,u\} \mapsto \left(\frac{u+u}{2}, \|u-u\|\right) = (u,0)$ ✓

F непрекидно ✓

$\mathbb{R}P^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow F$ није 1-1 (јер ако би било 1-1, комп $\xrightarrow{\text{непр.}} T_2 \Rightarrow$ затв. ⇝ утапање) ↯

- $F|_{\text{диск}}$ јесте утапање
- Тачке са $M(\gamma) \setminus \gamma$ су облика $\{u,v\}$, $u \neq v \Rightarrow \|u-v\| \neq 0$
  $\Rightarrow$ сликају се ван $\mathbb{R}^2 (z=0)$

⇒ тачка са $M(\gamma)\setminus\gamma$ и са диска не могу имати исту слику (Јасно је да не могу ни тачка са $M(\gamma)\setminus\gamma$ и са γ^c)

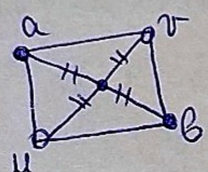
⇒ $\exists\ \{u,v\}, \{a,b\} \in M(\gamma)\setminus\gamma$ $(u\neq v,\ a\neq b)$

$\{u,v\} \neq \{a,b\}$

$F(\{u,v\}) = F(\{a,b\})$

$$\underbrace{\frac{u+v}{2} = \frac{a+b}{2}}_{\substack{\text{дужи } uv \text{ и } ab \\ \text{имају зај. средиште } ⊛}}\ ,\quad \underbrace{\|u-v\| = \|a-b\|}_{\substack{\text{дужи } uv \text{ и } ab \\ \text{су исте дужине}}}$$

⊛ Јасно да не може $a\in\{u,v\}$ нити $b\in\{u,v\}$ ни...

⇒ 

правоугаоник ✓ ☺ □