AFINA I EUKLIDSKA GEOMETRIJA

Afini prostori, potprostori

(1) U svakom afinom prostoru $\mathcal{A}$ nad poljem skalara $\mathbf{R}$ i dimenzije tri, važi:

⟨1⟩ Svaka prava sadrži bar dve tačke;

⟨2⟩ Za svake dve razne tačke postoji tačno jedna prava koja ih sadrži;

⟨3⟩ Svaka ravan sadrži bar tri tačke koje ne pripadaju istoj pravoj;

⟨4⟩ Za svake tri tačke, koje nisu na jednoj pravoj, postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži;

⟨5⟩ Ako ravan sadrži dve razne tačke jedne prave, onda sadrži i sve tačke te prave;

⟨6⟩ Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, onda one imaju i bar dve zajedničke tačke;

⟨7⟩ U prostoru $\mathcal{A}$ postoje bar četiri tačke koje nisu i u jednoj ravni.

(2) Koje od tvrđenja iz prethodnog zadatka važi u afinom prostoru $\mathcal{A}$ nad poljem skalara $\mathbf{R}$, čija je dimenzija različita od tri?

(3) Dve različite prave Π i Γ jedne ravni su paralelne, ako i samo ako su disjunktne.

(4) Dve različite prave Π i Γ u afinom prostoru $\mathcal{A}$ su komplanarne, ako i samo ako su, ili paralelne, ili imaju samo jednu zajedničku tačku.

(5) Ako tačka A nije na pravoj Π, u njihovoj ravni $\Sigma = \langle \Pi, A\rangle$ postoji tačno jedna prava, na primer Γ, koja sadrži tu tačku A i koja ne seče pravu Π.

(6) Ako ravan Σ seče dve paralelne ravni Π i Γ, u afinom prostoru $\mathcal{A}$, tada su i njihove prsečne prave paralelne.

(7) Ako su $\Pi = A+\mathbb{U}$ i $\Gamma = B+\mathbb{W}$ bilo koji potprostori afinog prostora $\mathcal{A}$ i $B = A+v$, direktrisa afinog omotača $\langle \Pi\cup\Gamma\rangle$ njihove unije je upravo suma potprostora $\mathbb{U},\mathbb{V}$ i $\Omega(v)$.

(8) Ako afini potprostori $\Pi = A+\mathbb{U}$ i $\Gamma = B+\mathbb{W}$ imaju bar jednu zajedničku tačku, dokazati da je tada $dim\langle \Pi\cup\Gamma\rangle = dim\Pi + dim\Gamma - dim\langle \Pi\cap\Gamma\rangle$.

(9) Ako su $\Pi = A+\mathbb{U}$ i $\Gamma = B+\mathbb{W}$ potprostori afinog prostora $(\mathcal{A},\mathbb{V},+)$ za koje je $\mathbb{V} = \mathbb{U}\oplus\mathbb{W}$, dokazati da njihov presek $\Pi\cap\Gamma$ mora biti jednočlan.

(10) Pravi potprostor Γ u afinom prostoru $\mathcal{A}$ dimenzije n je paralelan datoj hiperravni Π, ako i samo ako je $\Gamma\subset\Pi$ ili $\Gamma\cap\Pi = \emptyset$.

(11) Dve različite hiperravni u afinom prostoru dimenzije $n>1$ su, ili paralelne, ili je u njihov presek potprostor dimenzije $n-2$.

(12) Ako je $\mathcal{A}$ afinizacija vektorskog prostora $\mathbf{R}^2$ i $\Pi = \{(\alpha,\beta) : \ \alpha,\beta\in\mathbf{R}^+\}$, dokazati da je skup $\overrightarrow{\Pi}$ jedan vektorski potprostor od $\mathbf{R}^2$, ali da sam skup Π nije i afini potprostor afinog prostora $\mathcal{A} = \mathbf{R}^2_{\text{af}}$.

(13) Ako je $\mathcal{A}$ afini prostor dimenzije n, dokazati da se svaki njegov potprostor $\Pi = A+\mathbb{U}$ dimenzije $k<n$ može odrediti i kao presek $n-k$ hiperravni.

(14) Ako su E i F, tim redom, baricentri bilo koja dva sistema ponderisanih tačaka $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_p,\alpha_p)$ i $(B_1,\beta_1),\dots,(B_q,\beta_q)$, takvih da nijedan od skalara $\alpha_1+\cdots+\alpha_p=\alpha$, $\beta_1+\cdots+\beta_q=\beta$ i $\alpha+\beta=\delta$ nije nula, tada je baricentar S svih tih $p+q$ tačaka (A_r,α_r) i (B_s,β_s) upravo baricentar ponderisanih tačaka (E,α) i (F,β). Pri tom su tačke E,F,S kolinearne i važi $ES:SF=\beta:\alpha$.

(15) Skup $\mathbb{B}$ svih baricentara sistema $\mathbb{S} = (A_0,\dots,A_k)$ od $k+1$ tačaka afinog prostora $\mathcal{A}$ je upravo njegov afini omotač.

(16) Za afini omotač $\langle\mathbb{S}\rangle$ skupa $\mathbb{S} = (A_0,\dots,A_k)$ od $k+1$ tačaka afinog prostora $\mathcal{A}$, sledeći uslovi ekvivalentni:

1° Vektori $\overrightarrow{A_0A_1},\ \dots,\ \overrightarrow{A_0A_k}$ su linearno nezavisni;

2° Afini omotač od $\mathbb{S}$ je dimenzije k;

3° Za svaku tačku M iz skupa $\langle\mathbb{S}\rangle$, postoje jedinstveni skalari α_r za koje je $M = \alpha_0A_0+\cdots+\alpha_kA_k$ i $\alpha_0+\cdots+\alpha_k = 1$.

Afina preslikavanja

(17) Ako je η homotetija sa središtem P i π bilo koja transformacija iz afine grupe $\mathbb{GA}$ prostora $\mathcal{A}$, dokazati da je tada i $\theta = \pi\circ\eta\circ\pi^{-1}$ homotetija sa središtem $Q=\pi(P)$.

(18) Dokazati da dve homotetije η i δ u afinoj grupi prostora $\mathcal{A}$ komutiraju ako i samo ako imaju zajedničko središte homotetije.

(19) Ako su η i δ homotetije sa središtima P i Q i koeficijentima α i β, njihova kompozicija je ili translacija (za $\alpha\beta = 1$), ili homotetija (za $\alpha\beta \neq 1$). U prvom slučaju to je translacija za vektor $a = (1-\beta)\overrightarrow{PQ}$, a u drugom homotetija čije je središte S odredjeno sa $\overrightarrow{PS} = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{PQ}$.

(20) Dokazati da je kompozicija dve centralne simetrije translacija i odrediti njen vektor.

Ortogonalnost i upravnost

(1) Za svaki potprostor $\Pi = P + \mathbb{U}$ i svaku tačku A euklidskog prostora $\mathcal{E}$ dimenzije n postoji tačno jedan potprostor Γ koji sadrži tu tačku i za koji je $\Gamma \perp \Pi$, $\dim\Gamma = n - \dim\Pi$. Uz to je $\Gamma = A + \mathbb{U}^{\perp}$ i ta dva potprostora se seku u jednoj tački.

(2) Prava Γ je ortogonalna na datoj ravni Π u euklidskom prostoru $\mathcal{E}$, ako i samo ako je ortogonalna na bar dve njene konkurentne prave.

(3) Ako je R ortogonalna projekcija tačke A na ravan $\Pi = P + \mathbb{U}$ i S ortogonalna projekcija tačke R na datu pravu Δ u toj ravni, tada je S ortogonalna projekcija i tačke A na pravu Δ.

(4) Ravan Σ sadrži bar jednu pravu Γ koja je ortogonalna na ravni Π u prostoru $\mathcal{E}_3$, ako i samo ako je njena ortogonalna projekcija na ravan Π prava $\Delta = \Sigma \cap \Pi$.

(5) Ako su ravni Σ i Π u prostoru $\mathcal{E}_3$ upravne, prava Γ iz ravni Σ je ortogonalna na ravni Π, ako i samo ako je ortogonalna na pravoj $\Delta = \Sigma \cap \Pi$.

(6) Za svaku pravu Γ, koja nije ortogonalna na ravni Π u prostoru $\mathcal{E}$ dimenzije 3, postoji tačno jedna ravan Σ koja sadrži tu pravu i koja je upravna na ravni Π.

(7) Ravan Π u prostoru $\mathcal{E}$ dimenzije 3 je upravna na dve ravni koje se seku, na primer Ω i Σ, ako i samo ako je ortogonalna na njihovoj presečnoj pravoj $\Gamma = \Omega \cap \Sigma$.

(8) Za svake dve mimoilazne prave Δ i Θ u prostoru $\mathcal{E}_3$ postoji tačno jedna prava, koja ih seče i koja je ortogonalna na svakoj od njih.

Izometrija i sličnost

(1) Tačka P je jednako udaljena od krajeva duži $[AB]$, ako i samo ako je u hiperravni Σ koja sadrži središte te duži i koja je ortogonalna na pravoj $\langle A, B\rangle$.

(2) Ako je $\mathbb{F}_\sigma$ potprostor svih fiksnih tačaka date izometrije σ, tada za svaku translaciju $\tau = \tau_a$ i svaku izometriju π prostora $\mathcal{E}$ važi

  (a) $\tau_a \circ \sigma = \sigma \circ \tau_a \;\Leftrightarrow\; a \parallel \mathbb{F}_\sigma$;
  (b) $\omega = \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbb{F}_\omega = \pi\mathbb{F}_\sigma$.

(3) Izometrija $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ euklidskog prostora $\mathcal{E}$ je i simetrija, ako i samo ako je involutivna, to jest akko je $\sigma^2 = \varepsilon$.

(4) Potprostor Γ prostora $\mathcal{E}$ je invarijantan u odnosu na simetriju σ sa osnovom Π, akko je njegova ortogonalna projekcija na Π upravo $\Pi \cap \Gamma$.

(5) Za svaku izometriju ϕ, konjugat $\omega = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ date simetrije σ sa osnovom Π je simetrija sa osnovom $\phi\Pi$.

(6) Simetrija σ komutira sa izometrijom ϕ, ako i samo ako je njena osnova Π invarijantna u odnosu na ϕ, to jest ako i samo ako je $\phi\Pi = \Pi$.

(7) Afina transformacija $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ je simetrija euklidskog prostora $\mathcal{E}$, ako i samo ako ima bar jednu fiksnu tačku, na primer P, i ako, u odnosu na bar jedan ortonormirani reper Oe, ima matricu oblika $A = E_k \oplus (-E_m)$.

(8) Izometrija σ euklidskog prostora $\mathcal{E}$ je refleksija, ako i samo ako je skup $\mathbb{F}_\sigma$ svih njenih fiksnih tačaka hiperravan u $\mathcal{E}$.

(9) Izometrija σ euklidske ravni $\mathcal{E}$ je refleksija, ako i samo ako je indirektna i ako ima bar jednu fiksnu tačku.

(10) Ako osnova Δ simetrije σ_Δ nije u osnovi Π refleksije σ_Π prostora $\mathcal{E}$, skup $\mathbb{F}_\omega$ svih fiksnih tačaka kompozicije $\omega = \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi$ je njihov presek $\Delta \cap \Pi$.

(11) Refleksija σ_Π komutira sa pravom simetrijom σ_Δ prostora $\mathcal{E}$, ako i samo ako je $\Delta \subset \Pi$ ili $\Delta \perp \Pi$.

(12) Ako su osnove refleksije σ_Π i neke simetrije σ_Δ upravne, tada je i kompozicija $\omega = \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi$ simetrija u odnosu na njihov presek $\Gamma = \Delta \cap \Pi$.

(13) Translacija za vektor $a = \overrightarrow{AB}$ je kompozicija $\sigma_P \circ \sigma_A$ centralnih simetrija σ_A i σ_P, gde je P središte duži AB.

(14) Translacija τ za ne-nula vektor $a = \overrightarrow{AB}$ je kompozicija $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Pi$ refleksija σ_Π i σ_Γ, gde je Γ medijatrisa od AB i Π hiperravan koja sadrži A i koja je paralelna sa Γ.

(15) Za svaku rotaciju ϱ euklidske ravni $\mathcal{E}$ i svaku pravu a koja sadrži centar te rotacije, postoje jedinstvene prave b i c, takve da je $\varrho = \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_c$.

(16) Za svake dve poluprave p i q ravni $\mathcal{E}$, sa zajedničkim početkom S, postoje tačno po jedna rotacija i refleksija te ravni, koje polupravu p preslikavaju na polupravu q.

(17) Skup $\mathcal{R}_S$ svih rotacija ravni $\mathcal{E}$ oko date tačke S je komutativna i normalna podgrupa grupe $\mathbb{GI}_S$ svih izometrija ravni $\mathcal{E}$ koje fiksiraju tu tačku S.

(18) Dokazati da je kompozicija tri centralne simetrije euklidske ravni ponovo centralna simetrija.

(19) Svaka direktna izometrija σ euklidskog prostora $\mathcal{E}_3$ je kompozicija dve osne simetrije. Pri tom je ta kompozicija translacija, rotacija ili zavojno kretanje, ako i samo ako su ose tih simetrija, redom, paralelne, konkurentne ili mimoilazne.

(20) Svaka direktna sličnost σ ravni $\mathbb{E}$, koja nije izometrija, je kompozicija neke homotetije η i rotacije ω sa zajedničkom fiksnom tačkom i tada je $\sigma = \eta \circ \omega = \omega \circ \eta$.

(21) Svaka indirektna sličnost σ ravni $\mathbb{E}$, koja nije izometrija, je kompozicija neke homotetije η i refleksije ω sa zajedničkom fiksnom tačkom i tada je $\sigma = \eta \circ \omega = \omega \circ \eta$.