1. **KRIVE**

Definicija 1.1. **Regularna (parametrizovana) kriva** *u* $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, *je preslikavanje* $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, *klase* C^k *za neko* $k \geq 1$, *tako da je* $\dfrac{d\alpha}{dt} \neq 0$, *za sve* $t \in (a,b)$.

Oznake: $\dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$; $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''(t) = (\alpha_1''(t), \dots, \alpha_n''(t))$.

Definicija 1.2. **Vektor brzine** *regularne krive* $\alpha(t)$ *u* $t = t_0$ *je* $\dfrac{d\alpha}{dt}$ *izračunat u* $t = t_0$. **Brzina krive** α **u** $t = t_0$ *je intenzitet (dužina) vektora brzine u* $t = t_0$, *tj.* $\|\alpha'(t_0)\|$. **Brzina krive** *je funkcija* $v(t) = \|\alpha'(t)\|$.

Za krivu $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ kažemo da je **jedinične brzine** ukoliko je $||\alpha'(t)|| = 1$ za $a < t < b$.

Definicija 1.3. *Neka je* $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ *kriva.* **Vektorsko polje** (**polje vektora**) **duž krive** α *je funkcija* Y *koja svakom* $t \in (a,b)$ *dodeljuje vektor* $Y(t)$ *u tački* $\alpha(t)$.

$Y(t) = (y_1(t), .., y_n(t))$

Definicija 1.4. **Tangentno vektorsko polje** *na regularnu krivu* $\alpha(t)$ *je polje vektora*

$$T(t) = \frac{\dfrac{d\alpha}{dt}}{\left\| \dfrac{d\alpha}{dt} \right\|}.$$

Tangentna linija (**tangenta**) na regularnu krivu α u tački $t = t_0$ je prava:

$$l = \{w \in \mathbb{R}^3 | w = \alpha(t_0) + sT(t_0), s \in \mathbb{R}\}.$$

Definicija 1.5. *Neka su* $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ *i* $\beta : (c,d) \to \mathbb{R}^n$ *dve regularne parametrizovane krive klase* C^k. *Tada se kaže da su one* **ekvivalentne** *(piše se* $\alpha \sim \beta$*) ako postoji difeomorfizam* $\phi : (c,d) \to (a,b)$ *klase* C^k *tako da je* $\beta = \alpha \circ \phi$. *Kriva* β *je* **reparametrizacija** *krive* α. *Za* β *se kaže da je* **pozitivna reparametrizacija** *krive* α *ukoliko je* $\phi' > 0$, *a* **negativna reparametrizacija** *krive* α *ukoliko je* $\phi' < 0$.

Lema 1.1. *Relacija* $\sim$ *navedena u Definiciji 1.5 je relacija ekvivalencije.*

Definicija 1.6. *Klasa ekvivalencije* $[\alpha]$ *relacije* $\sim$ *je* **regularna geometrijska (neparametrizovana) kriva**, *tj.* **regularna kriva**, *ili samo* **kriva**.

Napomenimo da se termin "kriva" često koristi i za skup slika, tj. za $\mathcal{S} = \alpha((a,b))$, naročito ukoliko ne postoji mogućnost zabune. Za preslikavanje α kažemo da je "parametrizacija skupa" $\mathcal{S}$, "parametarski oblik" skupa $\mathcal{S}$, da "parametarski definiše" skup $\mathcal{S}$, ili, slobodnije, da je "parametrizacija krive" $\mathcal{S}$. Tako kažemo i da je "kriva α parametarski zadana, definisana".

Lema 1.2. *Neka je* β *reparametrizacija od* α. *Tada je*

$$\beta'(u) = \phi'(u)\,\alpha'(\phi(u)), \tag{1.1}$$

pri čemu je $\beta = \alpha \circ \phi$, $\phi : (c,d) \to (a,b)$, $c < u < d$.

Definicija 1.7. *Neka je* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ne obavezno neprekidna funkcija.* **Skup nula** *funkcije* F *je skup* $F^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 | F(p) = 0\}$. **Implicitno definisana kriva** *u* $\mathbb{R}^2$ *je skup nula diferencijabilne funkcije* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.1. *Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i q tačka takva da je $F(q) = 0$. Ukoliko je $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})|_q \neq 0$, tada postoji okolina $\mathcal{U}$ od q u $\mathbb{R}^2$ i (parametrizovana) kriva $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ takav da je $\{p \in \mathcal{U} | F(p) = 0\}$ slika od α .*

Koristeći polarne koordinate, ravansku krivu možemo zadati preslikavanjem $\alpha(\theta) = \rho_\alpha(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$, za $\rho_\alpha(\theta) \geq 0$, $a < \theta < b$. Tada kažemo da je $\alpha : (a, b) :\to \mathbb{R}^2$ **polarna parametrizacija**, a funkciju ρ_α zovemo **radijus funkcija** krive α. Radijus funkcija potpuno odredjuje polarnu parametrizaciju krive, pa često krivu definišemo koristeći samo radijus funkciju.

Definicija 1.8. *Neka je $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ regularna kriva. Pretpostavimo da je α definisana na otvorenom intervalu (c, d), sa $c < a < b < d$, tako da je α definisana i diferencijabilna u a i b.* **Dužina luka krive** *na intervalu $[a, b]$ je*

$$L(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||\,dt. \tag{1.2}$$

Neka je kriva α zadana polarnom parametrizacijom $\rho = \rho(\theta)$. Dokazati da je dužina krive α na segmentu $[a, b]$ data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}d\theta. \tag{1.3}$$

Neka je kriva α zadana sa $y = f(x)$. Tada je dužina krive α na segmentu $[a, b]$ data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}dx.$$

Za neko svojstvo krive kažemo da je geometrijsko ako ono ne zavisi od parametrizacije, ili ako samo zavisi od izbora orijentacije.

Teorema 1.2. *Neka je β reparametrizacija od α. Tada je $L(\alpha) = L(\beta)$.*

Definicija 1.9. *Fiksirajmo broj c sa $a < c < b$.* **Funkcija dužine luka** *s_α sa početkom u c krive $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ je definisana sa*

$$s_\alpha(t) = \int_c^t ||\alpha'(u)||du, \tag{1.4}$$

za $c \leq t \leq b$.

Teorema 1.3. *Neka je $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ regularna kriva. Tada postoji njena reparametrizacija β, čija je brzina jedinična.*

Funkcija dužine luka proizvoljne krive jedinične brzine (npr. $\beta : (c, d) \to \mathbb{R}^n$) zadovoljava

$$s = s(t) = \int_c^t ||\beta'(u)||du = t - c,$$

tj. funkcija s meri dužinu.

Posledica 1. *Neka je $\beta : (c, d) \to \mathbb{R}^n$ kriva dobijena reparametrizacijom definisanom Teoremom 1.3. Tada kažemo da je β* **parametrizovana dužinom luka** *ili da je to* **prirodna parametrizacija**.

Uobičajeno je da se prirodni parametar označava sa s. Odrediti prirodnu parametrizaciju prave, kružnice, elipse, parabole, heliksa...

Posledica 2. *Dve proizvoljne prirodne parametrizacije date krive razlikuju se za konstantu.*

Posledica 3. *Neka je α regularna kriva i $s = s(t)$ dužina luka te krive. Tada je*

(1) $\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = ||\alpha'(t)||$

(2) $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt}T(t)$

(3) $T(s) = \frac{d\alpha}{ds}$

Definicija 1.10. *Neka je $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva.*
Krivina krive *α je*

$$\kappa(s) = ||T'(s)||.$$

Vektorsko polje **glavnih normala** *krive α je*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}, \quad \kappa \neq 0$$

a vektorsko polje **binormala** *je*

$$B(s) = T(s) \times N(s), \quad \kappa \neq 0.$$

Torzija *krive α je funkcija*

$$\tau(s) = -< B'(s), N(s) >, \quad \kappa \neq 0.$$

Definicija 1.11. **Frenet-Serret-ov** *reper prirodno parametrizovane krive α je $\{T(s), N(s), B(s)\}$.*

Lema 1.3. *Neka je α prirodno parametrizovana kriva. Tada je* **Frenet-Serret-ov** *reper ortonormiran, u tačkama gde je $\kappa(s) \neq 0$.*

Teorema 1.4. *Neka je $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa(s) \neq 0, s \in (a,b)$. Tada je*

$$\begin{aligned} T'(s) &= & \kappa(s)N(s) & \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) & & + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= & -\tau(s)N(s) & \end{aligned}$$

za sve $s \in (a,b)$.

Definicija 1.12. *Neka je $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ regularna kriva i neka je $\tilde{\alpha} : (c,d) \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva α. Naime, $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t))$, pri čemu je $s(t)$ dužina luka. Označimo sa $\tilde{\kappa}$ i $\tilde{\tau}$ krivinu i torziju krive $\tilde{\alpha}$, a sa $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ Frenet-ovu bazu krive $\tilde{\alpha}$.* **Krivina krive proizvoljne brzine***, α, je reparametrizacija krivine krive $\tilde{\alpha}$, tj. $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s(t))$. Slično: $\tau(t) = \tilde{\tau}(s(t))$, $T(t) = \tilde{T}(s(t))$, $N(t) = \tilde{N}(s(t))$, $B(t) = \tilde{B}(s(t))$, za torziju i Frenet-ovu bazu.*

Teorema 1.5. *Neka je $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ regularna kriva sa brzinom $v(t) = ||\alpha'(t)|| = s'(t)$. Tada su "uopštene" Frenet-ove formule:*

$$\begin{aligned} T'(t) &= & v(t)\kappa(t)N(t) & \\ N'(t) &= -v(t)\kappa(t)T(t) & & + v(t)\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= & -v(t)\tau(t)N(t). & \end{aligned}$$

Lema 1.4. *Brzina i ubrzanje regularne krive α su dati formulama*

$$\alpha' = vT, \tag{1.5}$$

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt}T + v^2\kappa N, \tag{1.6}$$

gde v označava brzinu krive α.

Teorema 1.6. *Neka je $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ regularna kriva i $\kappa > 0$. Tada je:*

(1) $B = \dfrac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||}$;

(2) $N = B \times T$;

(3) $\kappa = \dfrac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}$;

(4) $\tau = \dfrac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{||\alpha' \times \alpha''||^2}$.

Definicija 1.13. Oskulatorna ravan *krive α parametrizovane dužinom luka u tački $\alpha(s)$ je ravan koja sadrži $\alpha(s)$ i ortogonalna je na vektor binormale. slično,* **normalna ravan** *je ortogonalna na T, a rektificiona ravan je ortogonalna na N.*

Teorema 1.7. *Izometrije prostora $\mathbb{R}^3$ čuvaju krivinu, torziju i izvod funkcije dužine luka. Znak torzije se menja ukoliko je izometrija indirektna.*

Teorema 1.8. *Neka su α i β prirodno parametrizovane krive u $\mathbb{R}^3$ definisane na istom intervalu (a, b) i pretpostavimo da imaju istu torziju i istu pozitivnu krivinu. Tada postoji izometrija koja preslikava α u β.*

Teorema 1.9. *Neka su $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ i $\tau : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije. Tada postoji kriva jedinične brzine $\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ čija je krivina κ i torzija τ.*

Definicija 1.14. *Neka je $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana kriva i N_z vektor normale takav da je $[T, N_z]$ pozitivno orijentisana ortonormirana baza. Tada je κ_z "uopštena" krivina krive α, pri čemu je $\alpha'' = \kappa_z N_z$.*

Teorema 1.10. *Neka je $k_z : (a, b) \to \mathbb{R}$ proizvoljna glatka funkcija. Tada postoji prirodno parametrizovana kriva $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ čija je "uopštena" krivina k_z.*

Ukoliko je $\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ neka druga prirodno parametrizovana kriva čija je "uopštena" krivina k_z, tada postoji direktna izometrija M u $\mathbb{R}^2$, takva da je $\beta(t) = M(\alpha(t))$, za sve $t \in (a, b)$.

Posledica 4. *Kriva α iz Teoreme 1.10 je:* $\alpha(t) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)dt, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(t)dt\right)$, $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k_z(u)du$.

Posledica 5. *Jedan od klasičnih načina da se opiše ravanska kriva α je pomoću* **prirodnih jednačina**, *tj. jednačina oblika $F(\kappa, s) = 0$, gde s označava funkciju dužine luka krive α. Ove jednačine jasno pokazuju kako se krivina menja pri promeni dužine luka i invarijantne su pri translaciji i rotaciji. Ipak, ove jednačine nisu baš korisne za račun.*