

Geometrija 3, prvi domaći zadatak (2016)

1. Kriva data polarnom jednačinom $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$ naziva se Bernulijeva lemniskata.

(a) Dokazati da je

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sqrt{2} \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right), \quad t \in (0, 2\pi),$$

jedna parametrizacija Bernulijeve lemniskate, ispitati njenu regularnost, izračunati krivinu i torziju i skicirati je.

(b) Dokazati da za svaku tačku sa Bernulijeve lemniskate važi da je proizvod njenih rastojanja od tačaka $(-1, 0)$ i $(1, 0)$ konstantan.

2. Odrediti Freneov reper, krivinu i torziju krive

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}s \right), \quad s \in (-1, 1)$$

i ilustrovati Frene-Sereove fomule.

3. Dokazati da je prirodno parametrizovana kriva α na jediničnoj sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ veliki krug ako i samo ako važi $\alpha'' = -\alpha$.