

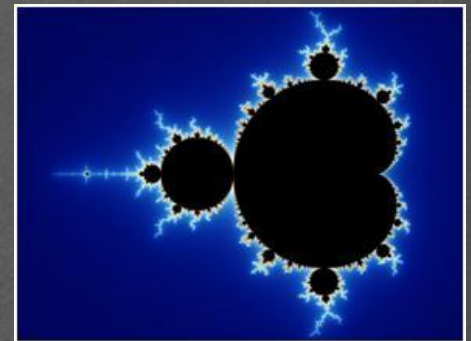
FRAKTALI



Predmet: Odabrana poglavlja geometrije B

Profesor: Mirjana Đorić

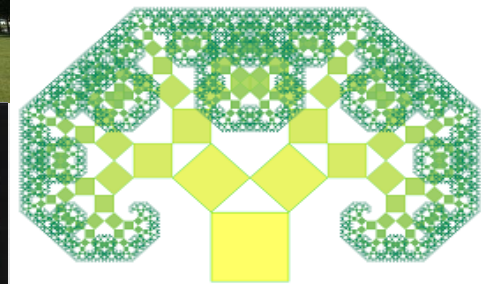
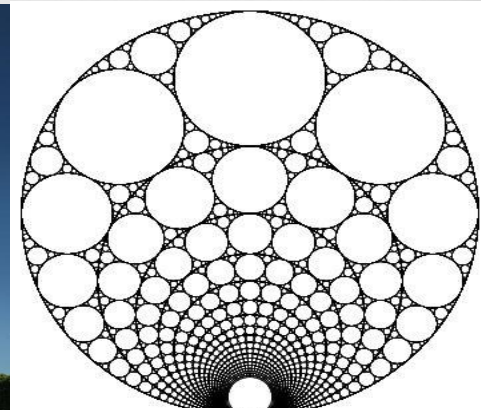
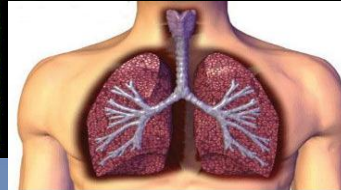
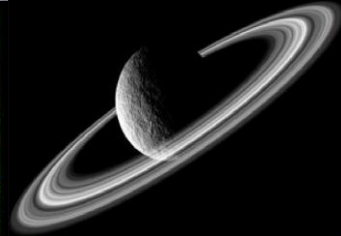
Student: Jelena Jovović



Fraktali-svuda oko nas i u nama



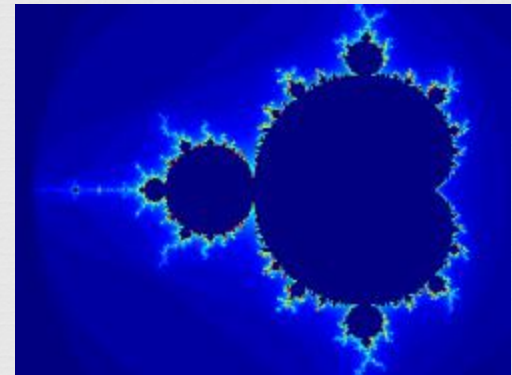
Prirodni i veštački fraktali



Šta je zapravo fraktal?



Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje delove tako da svaki od njih, makar približno, bude umanjena kopija celine.



Fraktalna geometrija



- ❧ Nova grana matematike, 19. i početak 20. veka
- ❧ Veza matematike i umetnosti
- ❧ Daje opis mnogih prirodnih oblika (obale, planine, biljke, delovi ljudskog organizma)
- ❧ Prožeta kroz mnoge oblasti nauke (astrofizika, biologija, medicina, kompjuterska grafika,...)

Istorijat



- ❧ Apolonije
- ❧ Lajbnic – 17. vek
- ❧ Vajerštras – Vajerštrasova funkcija -1872.
- ❧ Hegl Koh – Kohova pahulja – 1904.
- ❧ Vaclav Sierpinski – trougao Sierpinskog -1915.
- ❧ Kantor – Kantorovi skupovi
- ❧ Benoa Mandelbrot

Benoa Mandelbrot- otac fraktalne geometrije



- ❧ Benoa Mandelbrot (20.11.1924.-14.10.2010.)
- ❧ Rođen u Varšavi, Poljska
- ❧ Studirao matematiku, diplomirao na univerzitetima u Francuskoj i SAD-u
- ❧ 1975. dao definicija fraktala
- ❧ Fractus-razlomljen, slomljen





- ❧ „Oblaci nisu sfere, planine nisu konusi, razučene obale nisu krugovi, kora drveta nije glatka“
- ❧ 1977.- The Fractal Geometry of nature (Fraktalna geometrija prirode)
- ❧ 1958. – počinje da radi za IBM
- ❧ Prvi koristio računarsku grafiku za kreiranje i prikazivanje fraktalne geometrije
- ❧ Profesor na Jelskom univerzitetu

Svojstva fraktala



☞ Dve osnovne osobine fraktala su:

1. samosličnost
2. Fraktalna dimenzija koja nije ceo broj



Samosličnost

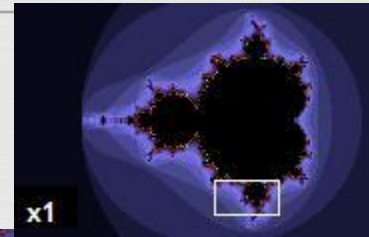


- ❧ Fraktali su objekti koji kada se uvećaju sami sebe sadrže
- ❧ Kada pogledamo jedan njegov deo on izgleda slično ili potpuno isto kao početni oblik i sastavljen je od istih takvih oblika sve manjih i manjih
- ❧ Fraktal je sebi sličan, njegovi delovi izgledaju kao i on ceo
- ❧ Fraktali predstavljaju skalirane kopije samog sebe

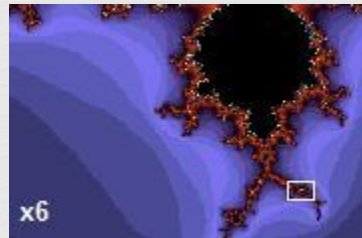
Samosličnost



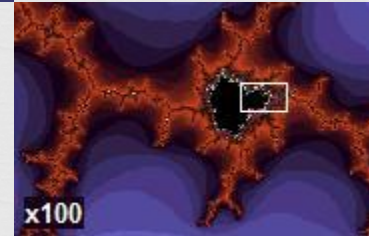
Polazni Mandelbrotov skup



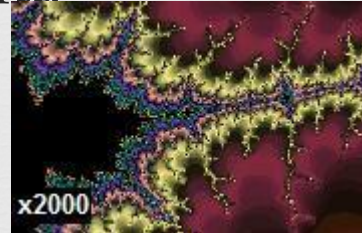
Uvećanje 6 puta



Uvećanje 100 puta



Uvećanje 2000 puta



Podela fraktala prema stepenu samosličnosti



- ❧ Potpuno slični fraktali – sadrže kopije koje su slične celom fraktalu (Kohova pahulja, trougao Sierpinskog,...)
- ❧ Kvazi samoslični fraktali – fraktal sadrži male kopije sebe koje nisu slične celom fraktalu (Mandelbrotov skup, Julijin skup)
- ❧ Statistički samoslični fraktali – fraktal ne sadrži kopije samog sebe, ali neke njegove osobine(fraktalna dimenzija) ostaju iste pri različitim procenama (Peanov šum)

Fraktalna dimenzija



- Fraktali su skupovi tačaka čija je fraktalna dimenzija strogo veća nego topološka.
- Topološka dimenzija – ceo broj
- Fraktalna dimenzija – nije ceo broj
- Postoji mnogo definicija fraktalne dimenzije
- Fraktalna dimenzija je vrednost koja nam daje uvid u to u kojoj meri neki fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi.

Fraktalna dimenzija



- ∞ D- fraktalna dimenzija
- ∞ N – broj objekata posmatranjih nakon smanjenja
- ∞ S – frktor smanjenja
- ∞ $N = S^D$
- ∞ $D = \frac{\log(N)}{\log(S)}$

Vrste fraktala



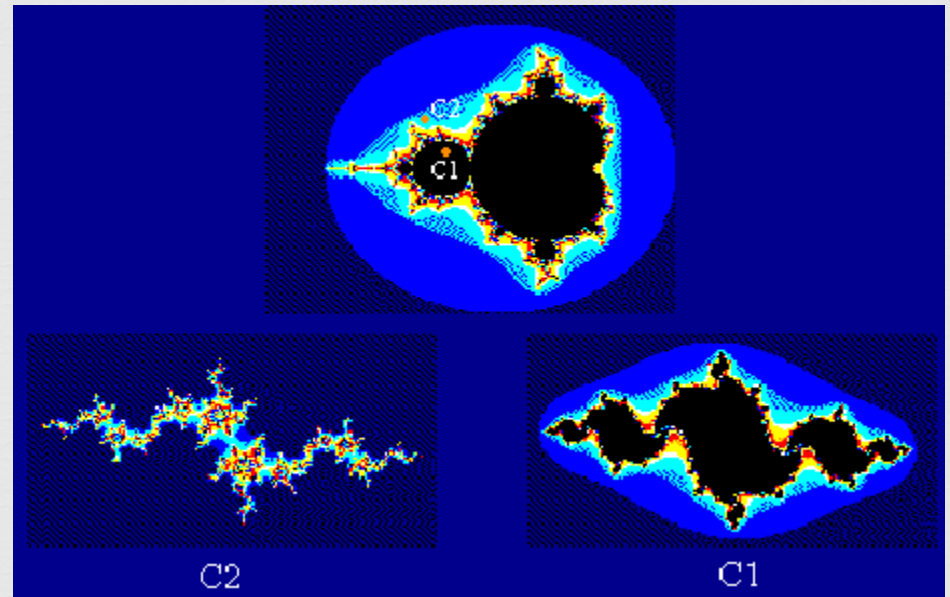
- Fraktali kompleksnih brojeva
- Sistem iterativnih funkcija(IFS) fraktala



Fraktali kompleksnih brojeva



- ☞ Gaston Maurice Julija i Benoa Mandelbrot – dva vodeća istraživača u oblasti fraktala kompleksnih brojeva
- ☞ Mandelbrotov skup
- ☞ Julijevi skupovi



Mandelbrotov skup



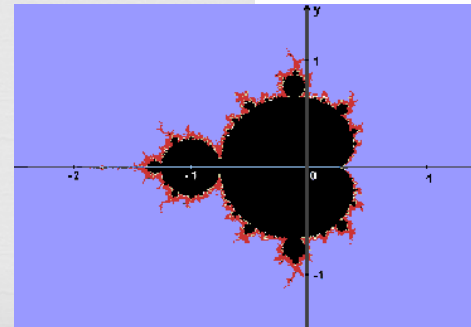
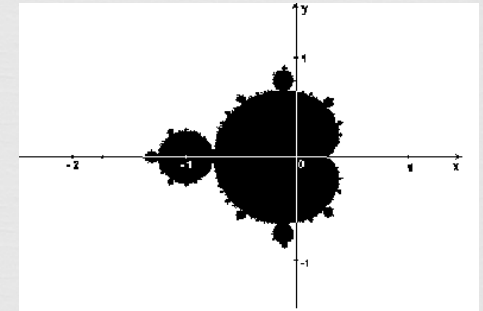
- ☞ Mandelbrotov skup je najsavršeniji od svih fraktala
- ☞ Ima svojstvo samosličnosti
- ☞ Mandelbrotov skup je skup tačaka u kompleksnoj ravni pri čemu fraktal formira granicu tog skupa
- ☞ Za formiranje koristi algoritam zasnovan na rekurentnoj formuli

$$z_n = z_{n-1}^2 + c$$

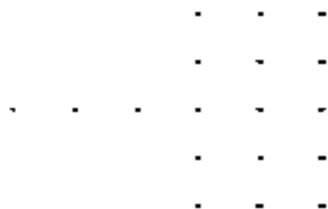
Koji razdvaja tačke kompleksne ravni

U dve kategorije

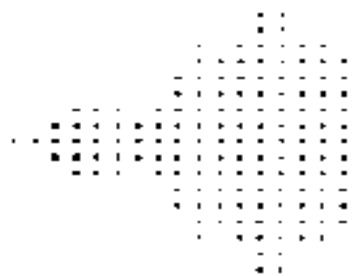
1. Tačke unutar Mandelbrotovog skupa
2. Tačke izvan Mandelbrotovog skupa



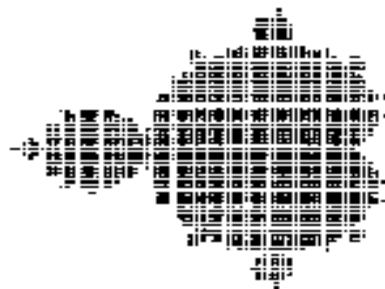
Mandelbrotov skup-u zavisnosti od broja tačaka



$N \times N = 100$



$N \times N = 900$



$N \times N = 10\ 000$

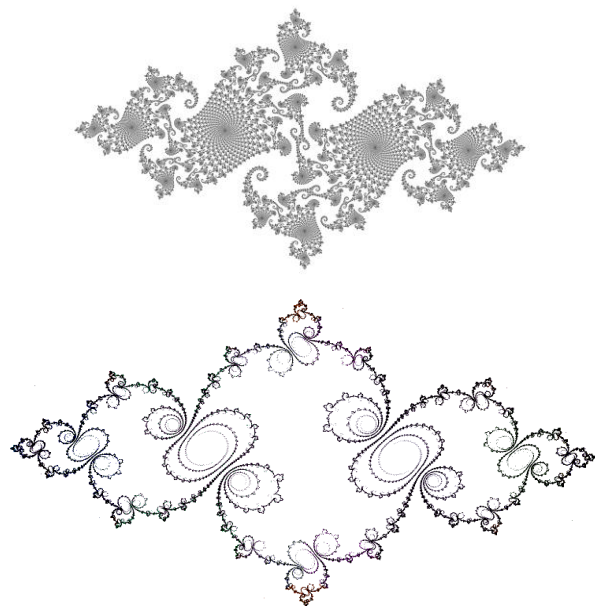


$N \times N = 1\ 000\ 000$

Julijevi skupovi



- ☞ Gastron Julija
- ☞ Definisani u kompleksnoj ravni slično kao Mandelbrotov skup



A Julia set

Sistemi iterativnih funkcija fraktala

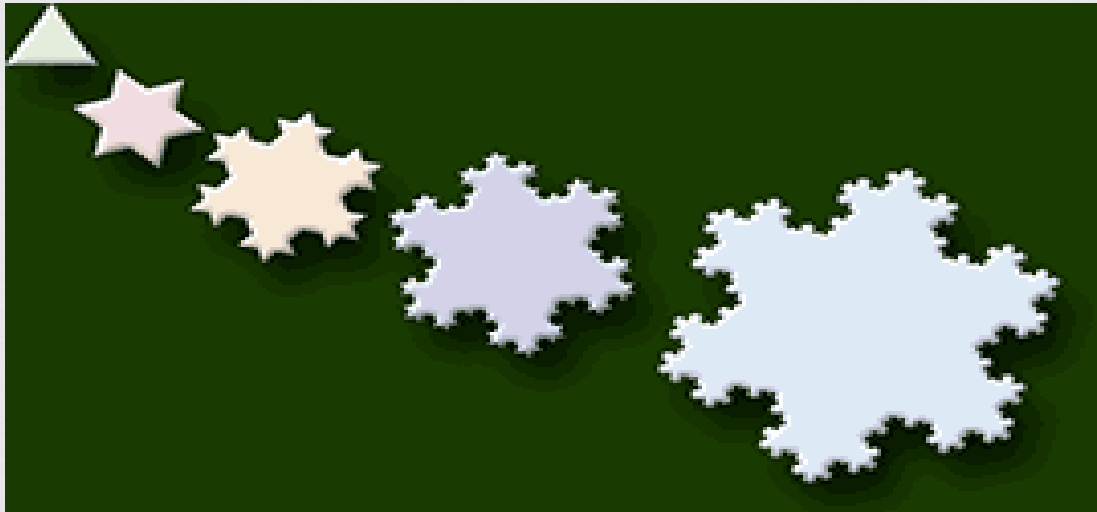


- ❧ Fraktali nastaju na osnovu jednostavnih transformacija ravni (skaliranje, rotacija, translacija...)
- ❧ Koraci:
 - ❧ 1. definisanje niza transformacija
 - ❧ 2. crtanje početnog obrasca u ravni
 - ❧ 3. transformacija početnog obrasca pomoću transformacija definisanih u prvom koraku
 - ❧ 4. transformacija nove slike koristeći isti skup transformacija
 - ❧ 5. ponavljanje koraka 4 onoliko puta koliko je to moguće

Kohova kriva i pahulja

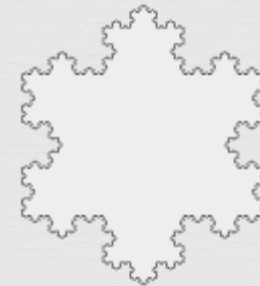
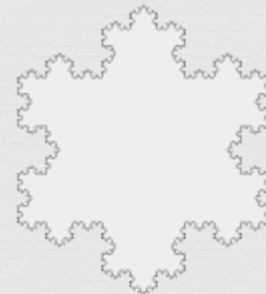
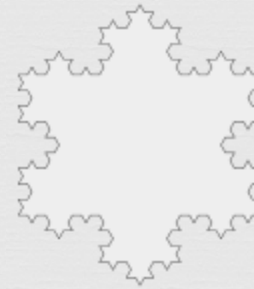
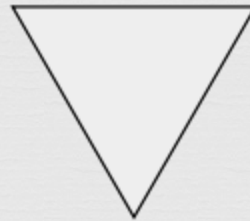


- ☞ Jedan od prvih i najpoznatijih fraktala
- ☞ Kod Kohove krive krećemo od duži, a kod pahulje od jednakostraničnog torugla



Iteracije Kohove krive i pahulje

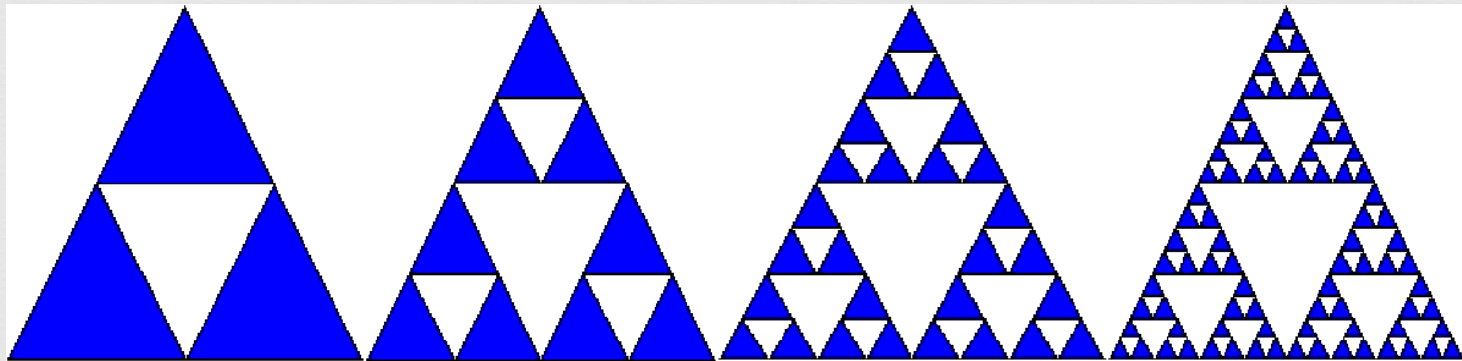
\mathcal{B}



Trougao Sierpinskog



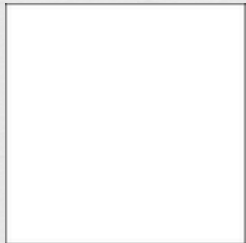
☞ Ovaj fraktal dobijamo tako što uzmemo središta svake stranice jednakostraničnog trougla i spojimo ih. Ponavljamo iteracije neograničen broj puta.



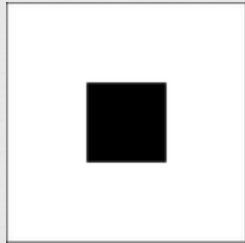
Tepih Sierpinskog



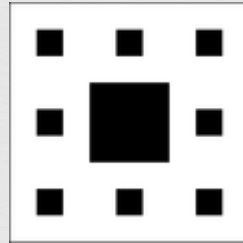
- ☞ Sličan toruglu, ali ima veću fraktalnu dimenziju
- ☞ Počinje se od kvadrata



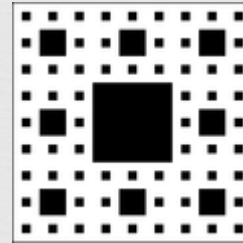
Nulta iteracija



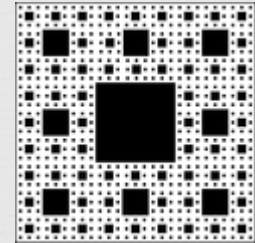
prva iteracija



druga iteracija

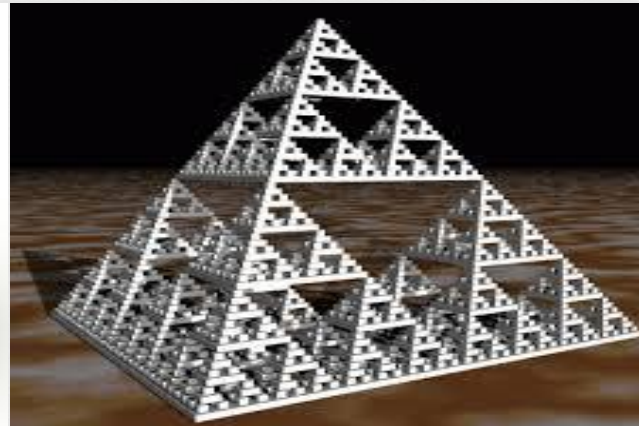
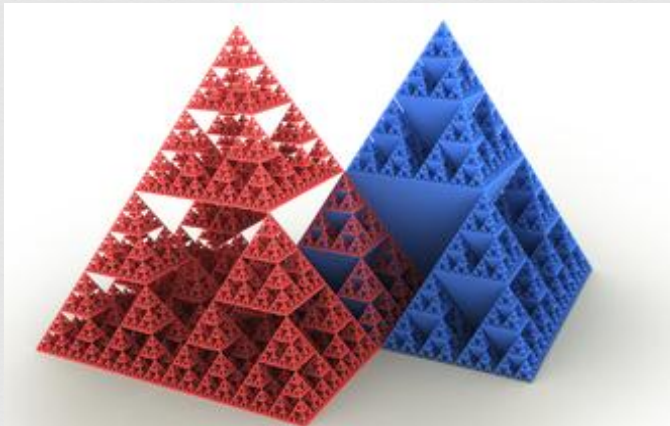


treća iteracija

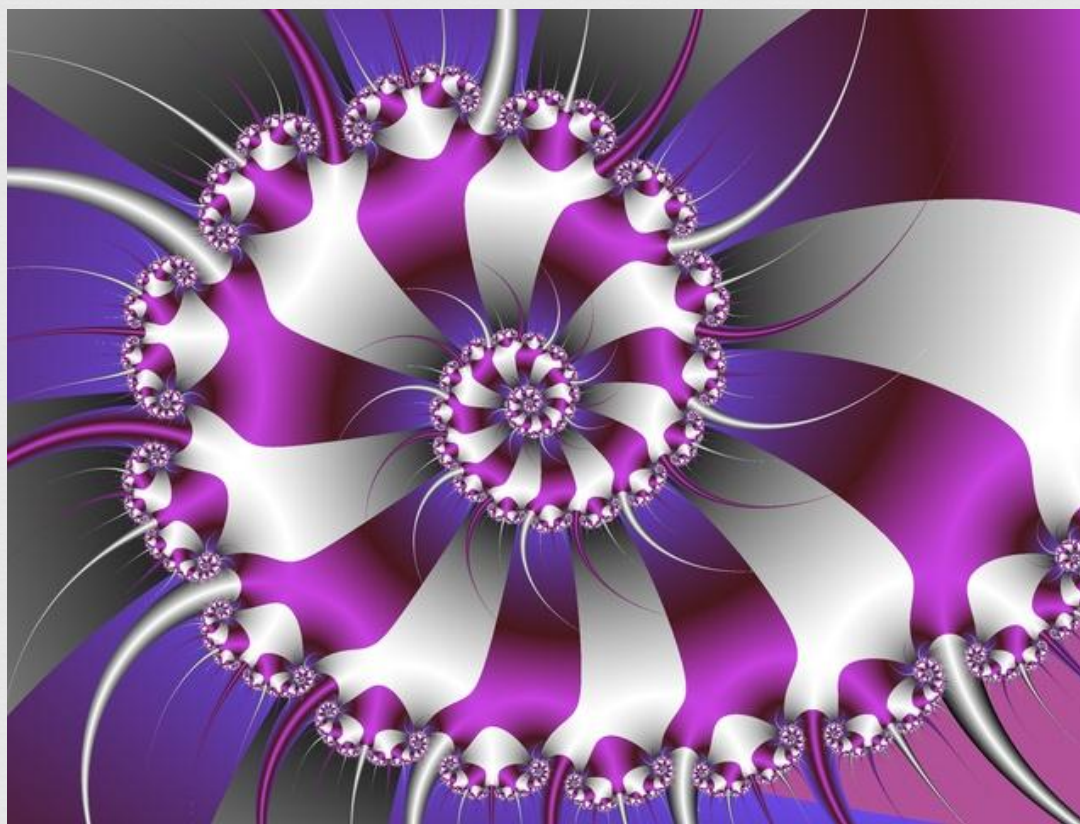


četvrta iteracija

Tetraedar Sierpinskog



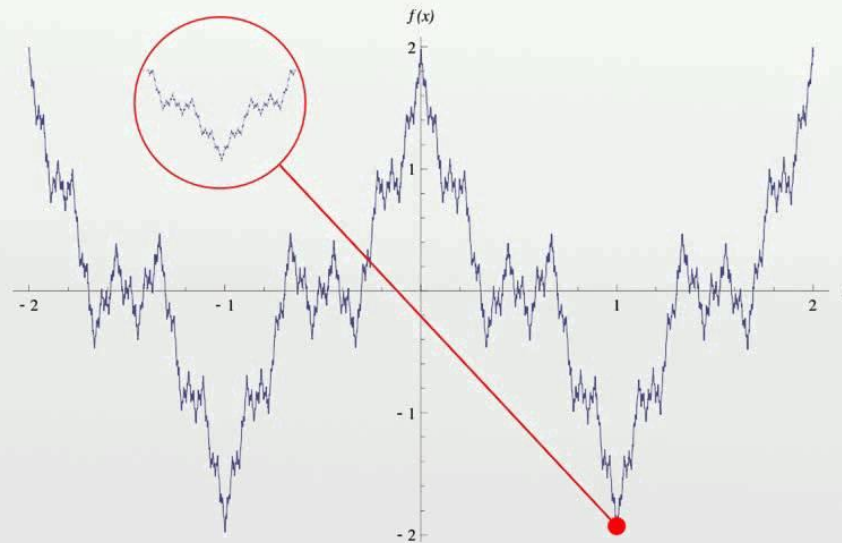
Fraktal, 3D grafik nelinearne diferencijalne jednačine



Vajerštrasova funkcija



Weierstrass function



<https://en.wikipedia.org/wiki/File:WeierstrassFunction.svg>

Primer fraktala u medicini-EKG



Primena fraktala



- ❧ Microsoft Encarta
- ❧ Fizika-teorija haosa
- ❧ Filmska industrija
- ❧ Mobilni uređaji-fraktalne antene
- ❧ Računarska grafika (crtanje terena)
- ❧ Medicina (otkrivanje raka)

Literatura



- ❧ <http://www.fractal.org/Bewustzijns-Besturings-Model/Fractals-Useful-Beauty.htm>
- ❧ http://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/
- ❧ A Biographical Memoir by Micheal Frame, National Academy of sciences, 2014.
- ❧ Matematika u arhitekturu 1, sajt Arhitektonskog fakulteta
- ❧ Wikipedija
- ❧ <http://www.viva-fizika.org/fraktali-i-deo/>