ЗАДАЦИ СА ВЕЖБИ – СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА
октобар, новембар 2013.

1. Машина се састоји из две независне компоненте A и B. За сваку од њих дужина рада до квара је експоненцијално расподељена случајна величина са параметром $\lambda_A = 3$, односно $\lambda_B = 8$. Машина отказује у тренутку првог квара једне од компоненти.
а) Одредити средње време до појаве квара за компоненту A, односно B.
б) Одредити средње време до отказа машине.
в) Одредити вероватноћу да компонента A проузрокује отказ машине.

2. Електронски уређај има „дужину живота“ X (у јединици времена 1000 сати) са густином расподеле вероватноћа

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Претпоставља се да трошак производње једног уређаја износи 2000 динара. Произвођач продаје уређај по цени од 5000 динара, и гарантује повраћај новца ако се машина поквари у периоду краћем од 500 сати. Одредити очекивану зараду произвођача.

3. Посматра се радиоактивни извор који емитује честице интензитетом (тј. по стопи) описаним густином $\varepsilon(1)$ расподеле (јединица времена је $1s$). Одредити вероватноћу да се честица (не обавезно прва) појави:
а) у току једне секунде од сада
б) у току три секунде од сада
в) између треће и четврте секунде од сада
г) након четири секунде од сада.

4. Играчка C има две батерије, чије су дужине рада X_1 и X_2, претпоставља се да су оне независне случајне величине, обе са $\varepsilon(a)$ расподелом, $a > 0$. Играчка је оперативна само ако обе батерије раде, и дужина оперативног периода играчке је X. Друга играчка D, такође, има две батерије, чије су дужине рада Y_1 и Y_2, претпоставља се да су оне независне случајне величине, обе са $\varepsilon(4a)$ расподелом. Играчка D прво користи једну батерију и када се она потроши одмах почиње да користи другу батерију. Дужина оперативног периода ове играчке је Y.
а) Одредити расподелу, математичко очекивање и дисперзију случајне величине X, односно Y.
б) Одредити расподелу количника случајних величина X и Y и математичко очекивање, ако постоји.
в) Израчунати вероватноћу да играчка C прва престане да ради.

---

5. Дефекти на каблу под морем јављају се у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda = 0.1$ по km.
а) Израчунати вероватноћу да нема дефеката у прва два километра кабла.
б) Ако је познато да нема дефеката у прва два километра кабла, израчунати вероватноћу да их неће бити ни у следећем километру.

6. Клијенти долазе у сервис у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом λ клијената по сату. Нека је $X(t)$ број клијената који дођу у сервис до тренутка t, $t \geq 0$.
а) Одредити вероватноћу да у сервис, до тренутка t, дође тачно k клијената.
б) Фиксирају се временски тренуци $0 < s < t$. Одредити:

$$P\{X(t) = n + k | X(s) = n\}$$
$$P\{X(s) = n | X(t) = n + k\}$$

где $n, k \in \mathbb{N}_0$.

7. Својство одсуства сећања за Пуасонов процес: Показати да случајна величина W_t, која представља дужину времена чекања од тренутка t $(t \geq 0)$ до првог следећег догађаја у хомогеном Пуасоновом процесу са интензитетом $\lambda > 0$, има $\varepsilon(\lambda)$ расподелу, независно од t.

8. Група таксиста чека путнике на главној железничкој станици. Путници стижу до таксија у складу са Пуасоновим процесом и то просечно 20 путника по сату. Такси креће чим „покупи“ четворо путника или прође $10min$ од када први путник седне у такси.
а) Претпостави се да човек уђе у такси као први путник. Израчунати вероватноћу да ће он морати да чека $10min$ док такси не крене.
б) Претпостави се да је човек ушао у такси као први путник и да чека већ $5min$. У међувремену, још двоје путника је ушло у такси. Израчунати вероватноћу да човек чека још $5min$ док такси не крене.

9. Одређена научна теорија тврди да се грешке при деоби ћелија дешавају у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом 2.5 по години, а да особа умире када се догоди 196 таквих грешака. Сматрајући ову теорију тачном:
а) израчунати просечан животни век особе
б) апроксимирати вероватноћу да особа:
- умре пре него што наврши 67.2 године
- доживи 90-у годину.

---

10. Претпоставља се да је дужина радног века сијалице, пре него што прегори, експоненцијално расподељена случајна величина са очекивањем 10 сати. Особа L уђе у канцеларију у којој је већ укључена сијалица. Ако ова особа намерава да у канцеларији ради наредних 5 сати, израчунати вероватноћу да ће моћи да заврши посао пре него што сијалица прегори.

11. У пошти раде два службеника. Претпостави се да када особа R уђе у пошту тамо затекне особу Q за једним шалтером и особу S за другим, и у току је њихово опслуживање. Познато је да ће особа R доћи на ред чим заврши особа Q или особа S. Ако је дужина временског периода, који сваки од службеника проведе опслужујући клијента, експоненцијално расподељена са очекивањем $\frac{1}{\lambda}$, одредити вероватноћу да ће од три поменута клијента (R, Q, S) особа R последња напустити пошту.

12. Клијенти долазе у банку у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом λ по сату. Претпоставља се да су два клијента дошла у току првог сата рада банке. Израчунати вероватноће:
а) оба су стигла током првих $20min$
б) бар један је стигао током првих $20min$.

13. Из луке полази трајект сваких $15min$. Трајект може да укрца највише N аутомобила. Аутомобили пристижу у луку у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом λ (јединица времена је четвртина сата). Претпостављајући да није било аутомобила у луци непосредно након што је испловио трајект у $9:00$:
а) одредити вероватноћу да није било аутомобила који су остали да чекају у $9:15$, непосредно након поласка наредног трајекта
б) одредити вероватноћу да није било аутомобила који су остали да чекају у $9:30$, непосредно након поласка другог наредног трајекта
в) возач је стигао у луку и погледао на сат, који је показао $9:07.5$; одредити вероватноћу да он неће ући на трајект који исплољава у $9:15$, него тек на следећи, који полази у $9:30$.

14. Возећи једносмерном улицом, која има само једну траку, аутомобили долазе до одређене локације у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Старија жена, која жели да пређе улицу баш на том месту, чека док не види да неће наићи ниједан аутомобил у следећих T јединица времена.
а) Одредити вероватноћу да је дужина њеног чекања једнака 0.
б) Одредити очекивано трајање жениног чекања.
НАПОМЕНА: Ако нема ниједног аутомобила који ће проћи датом локацијом у првих T јединица времена, онда је време чекања 0.

Друго решење:

б) Нека је N број аутомобила који прођу, пре него што жена може да пређе улицу. Како сваки пролазак аутомобила рестартује чекање, део а) указује на то да је N исто што и број независних $\mathcal{B}(1, e^{-\lambda T})$ покушаја пре него што се догоди први успех. Може се, стога, закључити да сл. величина $N+1$ има $\mathcal{G}(e^{-\lambda T})$ расподелу, па је $\boxed{EN = e^{\lambda T} - 1}$.

Што се тиче аутомобила који прође за мање од T јединица времена, ако се са X означи укупно време чекања, тада важи: $EX = E(E(X|N))$. $E(X|N)$ може се израчунати као N пута очекивање трајања једног проласка аутомобила, при услову да је оно мање од T, тј. ако $Y \in \mathcal{E}(\lambda)$

$$E(Y|Y \leq T) = \frac{1}{1-e^{-\lambda T}} \int_0^T \lambda y e^{-\lambda y}\, dy = \frac{1 - e^{-\lambda T}(\lambda T + 1)}{\lambda(1 - e^{-\lambda T})}$$

$$E(X|N) = N \cdot E(Y|Y \leq T)$$

$$\Rightarrow EX = \frac{1 - e^{-\lambda T}(\lambda T + 1)}{\lambda(1 - e^{-\lambda T})} \cdot EN = \boxed{\frac{e^{\lambda T} - \lambda T - 1}{\lambda}}$$

▲

---

15. Нека је $\{X(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$. Израчунати
$$E(X(u) - X(s)|X(t) = n)$$
за $0 \leq s < t < u$ и $n \in \mathbb{N}_0$.

16. У одређену такси станицу таксији са југа стижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $a > 0$, и, независно од њих, таксији са севера у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $b > 0$. Нека је X случајна величина, која означава број таксија који стижу са југа у временском интервалу између два узастопна доласка таксија са севера. Одредити закон расподеле за X, математичко очекивање и дисперзију ове случајне величине.

17. Број сати између узастопних долазака воза на станицу је равномерно расподељен на интервалу $(0,1)$. Путници стижу на станицу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом 7 по сату. Претпоставља се да је воз управо напустио станицу. Нека X представља број људи, који ће ући на следећи воз. Израчунати математичко очекивање и дисперзију случајне величине X.

18. Саобраћајне несреће у одређеном региону се, по претпоставци, дешавају у складу са Пуасоновим процесом $\boldsymbol{X} = \{X(t), t \geq 0\}$, са интензитетом $\lambda > 0$, а број особа које учествују у i-тој несрећи је случајна величина R_i, која има $\mathcal{G}(p)$ расподелу, $0 < p < 1$. Претпоставља се да су R_i међусобно независне случајне величине и независне од процеса $\boldsymbol{X}$. Означи се са $Z(t)$ укупан број особа које су учествовале у саобраћајним несрећама у временском интервалу $(0, t]$. Коришћењем генераторне функције одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине $Z(t)$, $t \geq 0$.

19. Ниво воде у одређеном резервоару смањује се по константној стопи од 1000 јединица дневно. Резервоар се пуни када (на случајан начин) дође до падавина. Падавине се дешавају у складу са Пуасоновим процесом, у просеку једном у 5 дана. Количина воде, којом падавина допуни резервоар, износи 5000 јединица са вероватноћом 0.8 или 8000 јединица са вероватноћом 0.2. Тренутна количина воде у резервоару је тек нешто испод 5000 јединица.
а) Израчунати вероватноћу да ће резервоар бити празан након пет дана.
б) Израчунати вероватноћу да ће резервоар бити празан у неком тренутку у наредних 10 дана.

---

20. Киоск са брзом храном отвара се у $8h$. Од $8h$ до $11h$ чини се да купци долазе, у просеку, по стопи која се постепено повећава од иницијалних 5 купаца у $8h$, и достиже максимум од 20 купаца у $11h$. Од $11h$ до $13h$ (просечна) стопа остаје константна и износи 20 купаца по сату. Међутим, (просечна) стопа долазака, затим, постепено опада од $13h$ до тренутка затварања у $17h$, када износи 12 купаца. Ако се претпостави да су бројеви купаца који долазе до киоска током дисјунктних временских интервала независни, описати вероватносни модел који би добро моделирао дату ситуацију. Израчунати вероватноћу да нема долазака купаца између $8:30$ и $9:30$ понедељком ујутру. Израчунати очекивани број долазака у овом периоду.

21. Фер новчић баца се бесконачно много пута и резултати бацања су $Y_0, Y_1, \ldots$, при чему је

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{, ако је пало "П"} \\ 0 & \text{, ако је пала "Г"} \end{cases}$$

За $n \geq 1$ нека је $X_n = Y_{n-1} + Y_n$ укупан број "П" у $(n-1)$-ом и n-том бацању. Испитати да ли је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ланац Маркова.

22. Три беле и три црне куглице расподељене су у две кутије, тако да свака од њих садржи по три куглице. Каже се да је систем у стању i, $i = 0, 1, 2, 3$, ако прва кутија садржи i белих куглица. У сваком кораку, извлачи се по једна куглица из сваке кутије и куглица извађена из прве кутије ставља се у другу и обрнуто. Нека X_n представља стање система након n корака. Објаснити зашто је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ланац Маркова и одредити матрицу вероватноћа прелаза за један корак P.

---

23. Трансформација процеса у ланац Маркова: Претпостави се следеће: да ли данас пада киша или не зависи од претходних временских прилика од последња два дана. Посебно, претпостави се да: ако пада киша у последња два дана сутра ће падати са вероватноћом 0.7; ако је падала киша данас, а јуче није, сутра ће падати са вероватноћом 0.5; ако је киша падала јуче, али не и данас, сутра ће падати са вероватноћом 0.4; ако киша не пада у последња два дана сутра ће падати са вероватноћом 0.2. Моделирати описану ситуацију ланцем Маркова.

• Проблем: одредити вероватноћу да ланац Маркова уђе у неки, одређени скуп стања $A (\subset S)$ до тренутка n (тј. до n-тог корака)

Ако је $P = (p_{ij})$ матрица вероватноћа прелаза за један корак оригиналног ланца Маркова, може се формирати матрица $Q = (q_{ij})$ таква да је

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i\in A,\ j=i \\ 0, & \text{ако } i\in A,\ j\neq i \\ p_{ij}, & \text{иначе} \end{cases}$$

чиме су сва стања из скупа A трансформисана у апсорбујућа. Оригинални и (на описани начин) трансформисани ланац Маркова имају исте вероватноће све док се у неко стање из A, одакле следи да је вероватноћа догађаја да оригинални ланац Маркова уђе у неко стање из A до тренутка n једнака вероватноћи да се трансформисан ланац Маркова налази у једном од стања из A у тренутку n.

Тражена вероватноћа једнака је $q_{ij}^{(n)}$, ако се зна да је оригинални ланац кренуо из стања $i \notin A$, $j \in A$

• Проблем: одредити условне вероватноће за X_n, при услову да је ланац кренуо из стања i и није ушао у скуп A закључно са n-тим кораком, $i, j \notin A$

$$P\{X_n = j \mid X_0 = i, X_k \notin A \text{ за } k=\overline{1,n}\} = \frac{P\{X_n=j, X_0=i, X_k\notin A \text{ за } k=\overline{1,n}\}}{P\{X_0=i, X_k\notin A \text{ за } k=\overline{1,n}\}} = \frac{P\{X_n=j, X_k\notin A \text{ за } k=\overline{1,n} \mid X_0=i\}}{P\{X_k\notin A \text{ за } k=\overline{1,n} \mid X_0=i\}}$$

$$= \frac{q_{ij}^{(n)}}{\sum_{r\notin A} q_{ir}^{(n)}}$$

јер $q_{ij}^{(n)}$ за $i, j \notin A$ представља вероватноћу да оригинални ланац, за који се зна да је кренуо из стања i, за n корака буде у стању j, а да у међувремену (закључно са n-тим кораком) није ушао у скуп стања A

24. Одређеног дана дечак је или весео (В) или се осећа тако-тако (Т) или је мрзовољан (М). Ако је данас весео сутра ће бити В, Т, М са вероватноћама, редом, $0.5, 0.4, 0.1$. Ако се данас осећа тако-тако сутра ће бити В, Т, М са вероватноћама, редом, $0.3, 0.4, 0.3$. Ако је данас мрзовољан сутра ће бити В, Т, М са вероватноћама, редом, $0.2, 0.3, 0.5$.

а) Моделирати описану ситуацију ланцем Маркова.

б) Израчунати вероватноћу да након што је једног дана био весео, дечак наредна два дана буде мрзовољан.

в) Дечак је тренутно весео. Израчунати вероватноћу да неће бити мрзовољан ниједног од следећа три дана.

г) Дечак је био мрзовољан пре четири дана. Ако се зна да није био весео целе недеље, израчунати вероватноћу да је данас мрзовољан.

Решење:

В - 0
Т - 1 (кодирана стања)
М - 2

в) Уочи се скуп $A=\{2\}$ и трансформише ланац Маркова тако што се стање 2 прогласи апсорбујућим. Тиме се добија матрица Q_1.

$$Q_1=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix}$$

Тражена вероватноћа је $\boxed{1-q_{02}^{(3)}}$, која се лако може добити из матрице

$$Q_1^3=\begin{pmatrix} 0.293 & 0.292 & \underline{0.415} \\ 0.219 & 0.220 & 0.561 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ и износи $\boxed{0.585}$.

г) Овог пута уочи се скуп $A=\{0\}$ и формира матрица Q_2.

$$Q_2=\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Тражена вероватноћа је $P\{X_4=2 \mid X_0=2, X_i \notin A \text{ за } i=\overline{1,4}\}=\dfrac{q_{22}^{(4)}}{1-q_{20}^{(4)}}$, која се лако може добити из матрице $Q_2^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7053 & 0.1354 & 0.1593 \\ \underline{0.6522} & 0.1593 & \underline{0.1885} \end{pmatrix}$ и износи $\boxed{0.542}$. ▲

25. Човек прима зараду од 2 (хиљаде долара) на почетку сваког месеца. Количина новца која му је потребна за трошак у току месеца независна је од количине новца коју има и износи i са вероватноћом P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$. Ако човек на крају месеца има више од 3, он вишак новца (преко 3) даје у добротворне сврхе.
а) Ако, након примања зараде на почетку месеца, човек има капитал од 5, израчунати вероватноћу да његов капитал буде 1 или мање у неком тренутку у наредна четири месеца.
б) Ако човек има капитал од 5 на почетку јануара, израчунати вероватноћу да је његов капитал 4 на почетку маја, а да, при томе, ни у једном тренутку није био мањи или једнак 1.

26. Припадни графови ланаца Маркова – класификација стања

---

27. Адвокат стиже кући из канцеларије сваке вечери у $22h$ и тачно у то време паркира свој ауто у гаражу. Његова гаража осветљена је са две сијалице. Адвокат мења прегореле сијалице непосредно након свог доласка, али само ако су обе прегореле. Претпоставља се да са вероватноћом 0.003 сијалица прегори за један дан. Сијалице функционишу независно једна од друге. Моделирати описану ситуацију ланцем Маркова и одредити стационарну расподелу.

Уведу се ознаке:

- $f_{ij}(n)$ - вероватноћа да ланац Маркова полазећи из стања i, први пут уђе у стање j након тачно n корака, $n\in N$

$f_{ij}(n) = P\{X_n=j, X_{n-1}\neq j, \dots, X_1\neq j \mid X_0=i\}$

f_{ij} - вероватноћа да ланац Маркова полазећи из стања i икада уђе у стање j

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ij}(n)$$

$f_j := f_{jj}$

- Очекивани бр. корака до првог уласка у стање j, полазећи из стања i, је

$$\mu_{ij}=\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ij}(n), & \text{ако је } f_{ij}=1 \\ +\infty, & \text{ако је } f_{ij}<1 \end{cases} \qquad i\neq j$$

$$\mu_{ij}=p_{ij}+\sum_{k\neq j} p_{ik}(1+\mu_{kj}) = \underline{1+\sum_{k\neq j} p_{ik}\mu_{kj}}$$

Ако је $i=j$ μ_{ii} је очекивани бр. корака до првог повратка у стање i

Ако је стање i позитивно повратно $\mu_{ii}=\frac{1}{\pi_i}$ (π_i - вероватноћа из стац. расподеле)

28. Жена има три кишобрана – неке код куће, а неке у канцеларији. Ако полази ујутру од куће или увече са посла и пада киша она ће узети кишобран, ако има кишобрана на располагању; иначе жена покисне. Претпоставља се да, независно од прошлости, киша пада са вероватноћом 0.25. Нека је X_n број кишобрана који су јој на распологању при n-том поласку (од куће или с посла). Ако су садашњи временски услови независни од прошлости, ситуацију описати ланцем Маркова.

а) Одредити период стања 0.

б) Израчунати колико (процентуално) пута жена покисне, гледано у дужем временском периоду.

в) На поласку од куће јутрос, био је један кишобран код куће. Израчунати очекивани број пута пре него што жена не буде имала ниједан кишобран на располагању.

29. На фарми пилића залихе хране чувају се у складишту које може примити највише $2b - 1\ kg$ хране. Рано ујутру n-тог дана фармер Филип узима $B_n\ kg$ хране да би нахранио пилиће, $B_n \in \{0, 1, \dots, b\}$. Вероватноћа да Филипу одређеног дана треба $k\ kg$ хране једнака је p_k. Штавише, количине хранепотребне различитим данима су међусобно независне и независне од доступне количине хране у складишту. Даље, на крају сваког дана, његова жена Матилда проверава стање у складишту и допуњава са $b\ kg$, ако је количина строго мања од $b\ kg$; иначе она не допуњава.

а) Одредити матрицу вероватноћа прелаза за један корак P.

б) Узме се конкретно $b = 3$. Претпостави се да је Филип ујутру затекао $5\ kg$ хране у складишту. Израчунати очекивани број дана док не буде $3\ kg$ хране у складишту.

в) Одредити (процентуално гледано) део укупног броја дана, на дуже стазе, таквих да се у складишту налази најмање $2\ kg$ хране, након што је Филип нахранио пилиће, а пре него што је Матилда проверила складиште.

30. Разматра се проблем коцкара (gambler's ruin), код кога коцкар започиње игру са улогом од \$50, добија \$10 у свакој партији са вероватноћом $p = 0.45$ или губи \$10 са вероватноћом $q = 0.55$. Коцкар завршава игру када удвостручи свој новац или му не остане ништа од почетног улога од \$50.

а) Израчунати вероватноћу да коцкар изгуби свој новац у 11-ој партији.

б) Израчунати вероватноћу да игра траје дуже од 13 партија.

в) Израчунати очекивани број партија које играч треба да одигра до салда од \$90.