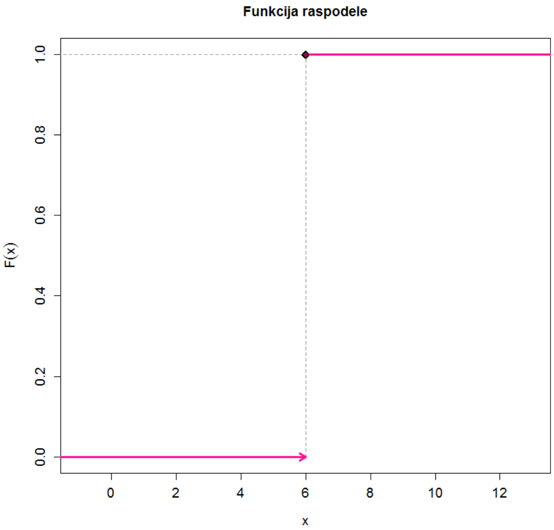
ВАЖНЕ ДИСКРЕТНЕ РАСПОДЕЛЕ

Дегенерисана расподела

$$X:\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

где је $c \in \mathbb{R}$ константа
$EX = c,\ DX = 0$

Пример: X – резултат једног бацања коцкице за игру чије су све стране нумерисане истим бројем, нпр. шестицом
График одговарајуће функције расподеле:

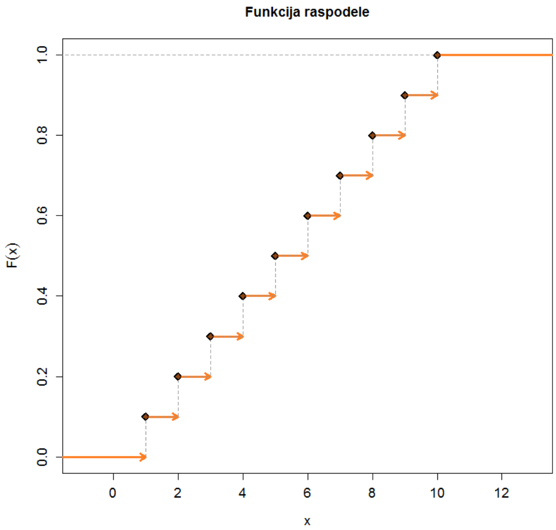


Равномерна расподела на коначном скупу

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{pmatrix}$$

где је $n \in \mathbb{N}$
$EX = \frac{N+1}{2},\ DX = \frac{N^2-1}{12}$

Пример: Десет цедуља нумерисаних бројевима $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ стављено је у шешир. На случајан начин (тј. са једнаком вероватноћом) извлачи се једна цедуља из шешира. X – број којим је нумерисана извучена цедуља
График одговарајуће функције расподеле:

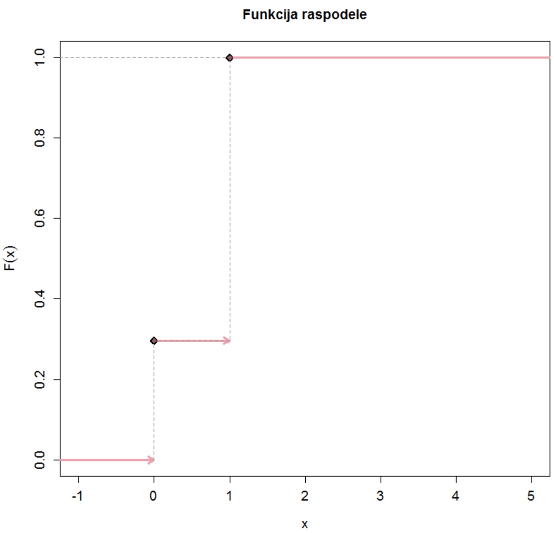


Бернулијева расподела

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

где је $0 < p < 1$
$EX = p,\ DX = p(1-p)$

Пример: Хомогена коцкица за игру баца се три пута. Нека је A догађај да је бар један од бројева добијених у ова три бацања већи од 4. $X = I_A$ – индикатор догађаја A ('успеха')
График одговарајуће функције расподеле:



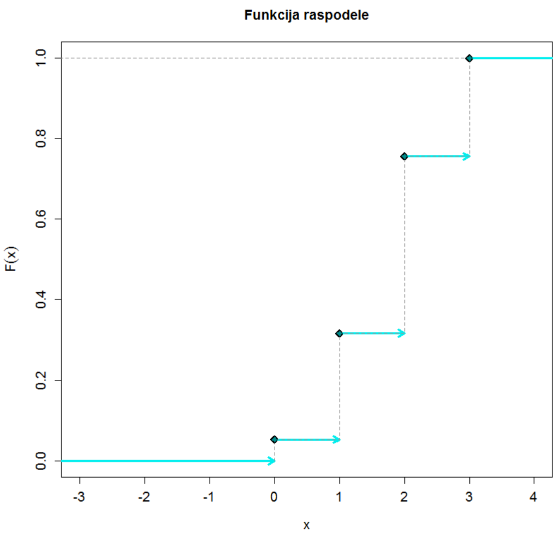
Биномна расподела

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ q^n & npq^{n-1} & \dots & \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

где је $n \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1,\ q \coloneqq 1-p$
$EX = np,\ DX = np(1-p)$

бројач 'успеха' у Бернулијевој схеми

Пример: У кутији се налази пет белих и три црне куглице. Из кутије се на случајан начин бирају три куглице, једна за другом са враћањем. X – укупан број изабраних куглица беле боје
График одговарајуће функције расподеле:



Пуасонова расподела

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \dots & \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{pmatrix}$$

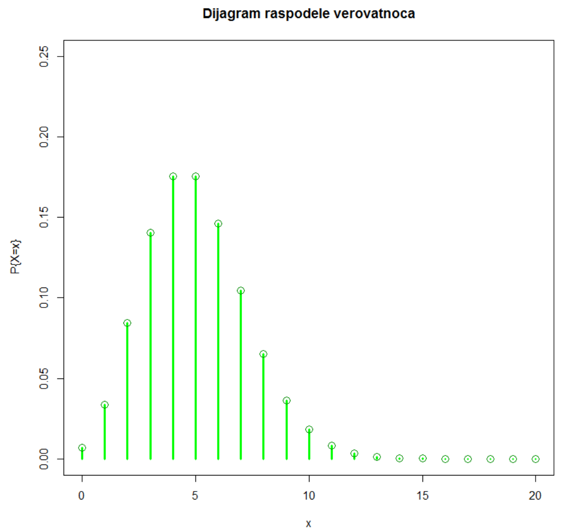
где је $\lambda > 0$

$EX = \lambda,\ DX = \lambda$

Користи се као добра апроксимација расподеле случајних величина којима се моделирају 'ретки' догађаји нпр:

- број штампарских грешака на страници књиге
- број људи на свету старих бар 100 година
- број дефектних уређаја из исте серије
- број клијената који уђу у банку одређеног дана
- број саобраћајних незгода на извесној раскрсници у току године

График одговарајућих вероватноћа из закона расподеле Пуасонове $\mathcal{P}(5)$ расподеле (тзв. дијаграм расподеле вероватноћа):



Хипергеометријска расподела

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

$\max\{0, n + m - N\} \le k \le \min\{n, m\}$ целобројно,

где је $N \in \mathbb{N}_0,\ \ n, m \in \{0, 1, \dots, N\}$

$EX = \frac{nm}{N},\ DX = \frac{nm}{N} \cdot \frac{N-m}{N}\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$

Пример: У једном складишту налази се 1500 сијалица, међу којима је 4% дефектних. На случајан начин одабран је узорак од 20 сијалица. X – укупан број дефектних сијалица у изабраном узорку

у основи се налази 'случајан избор без враћања' за разлику од Бернулијеве схеме која се везује за понављање експеримента под истим условима (сваки пут независно од претходних), чему одговара случајан избор са враћањем

Ако се N и m повећавају и теже бесконачности, али тако да $\frac{m}{N} \to p,\ 0 < p < 1$, тада хипергеометријске вероватноће теже биномним $\mathcal{B}(n, p)$ вероватноћама. Према томе, биномне вероватноће могу се примењивати и за одређивање приближне вредности вероватноћа код избора без враћања из популације великог обима N, при чему је апроксимација боља ако је n „неупоредиво“ мање од m и од $N - m$.

Геометријска расподела

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p & pq & \dots & pq^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

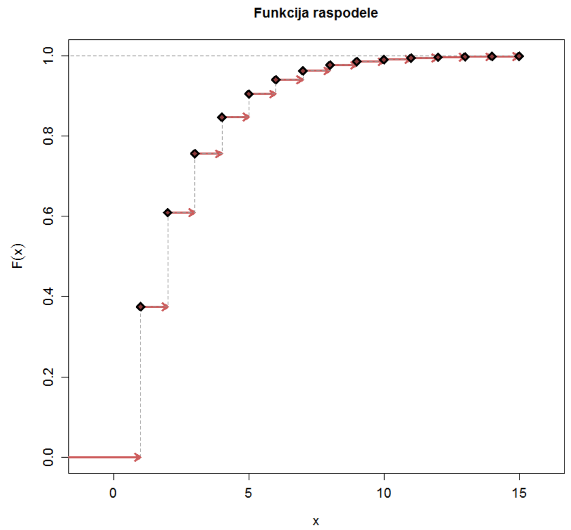
где је $0 < p < 1,\ q \coloneqq 1 - p$

$EX = \frac{1}{p},\ DX = \frac{1-p}{p^2}$

бројач експеримената у Бернулијевој схеми до реализације првог 'успеха' (укључујући и експеримент у коме се десио успех)

Пример: Истовремено се бацају три регуларна новчића и тај случајни експеримент се понавља све док се на њиховим горњим странама не појаве (истовремено) укупно два писма. X – укупан број изведених бацања

График одговарајуће функције расподеле:



Негативна биномна расподела

$$X: \begin{pmatrix} r & r+1 & \dots & k & \dots \\ p^r & rp^r q & \dots & \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} & \dots \end{pmatrix}$$

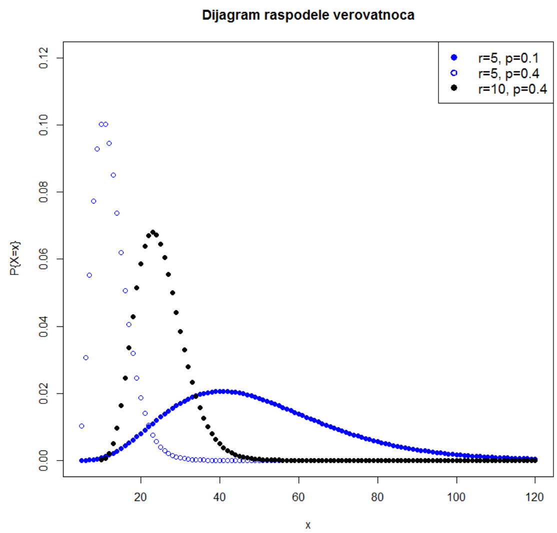
где је $r \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1,\ q \coloneqq 1 - p$

$EX = \frac{r}{p},\ DX = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$

бројач експеримената у Бернулијевој схеми до реализације тачно r 'успеха'

Пример: Стрелац гађа у мету и у сваком гађају вероватноћа поготка износи p. Он изводи гађања све док не погоди мету тачно r пута (не мора заредом). X – укупан број изведених гађања

Дијаграми расподеле вероватноћа:



ВАЖНЕ АПСОЛУТНО-НЕПРЕКИДНЕ РАСПОДЕЛЕ

Равномерна расподела на ограниченом интервалу

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$$

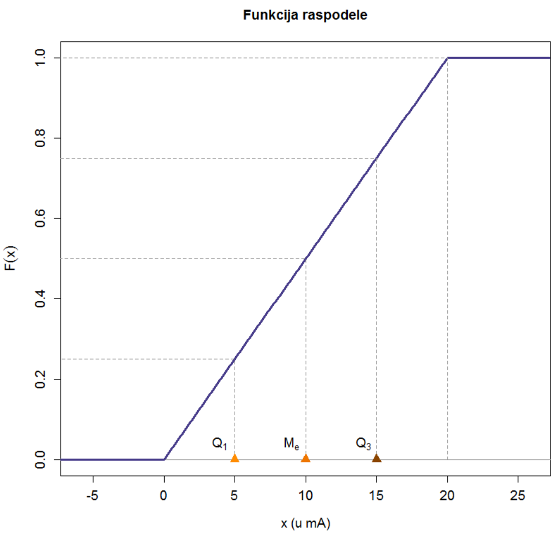
где су $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, константе

$EX = \frac{a+b}{2}$, $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

Одговарајућа функција расподеле:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

График функције расподеле сл. величине $X \in \mathcal{U}[0, 20]$, која представља јачину струје (у mA) измерене у танкој бакарној жици:



Експоненцијална расподела

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

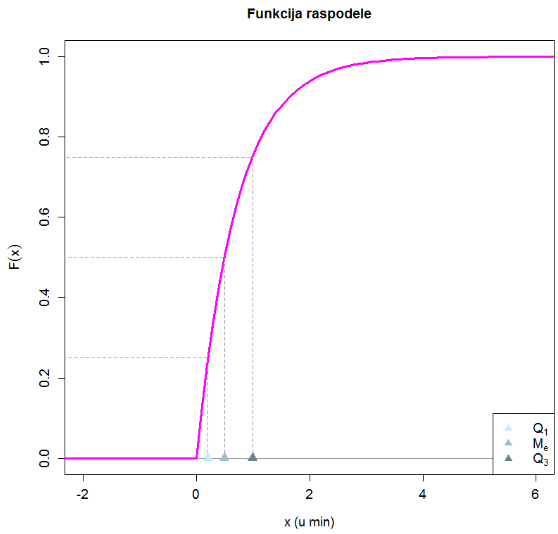
где је $\lambda > 0$ константа

$EX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

Одговарајућа функција расподеле:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

График функције расподеле сл. величине $X \in \varepsilon(1.4)$, која представља дужину временског интервала (у min) између две узастопне детекције радиоактивне честице на Гајгеровом бројачу:



Нормална расподела

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

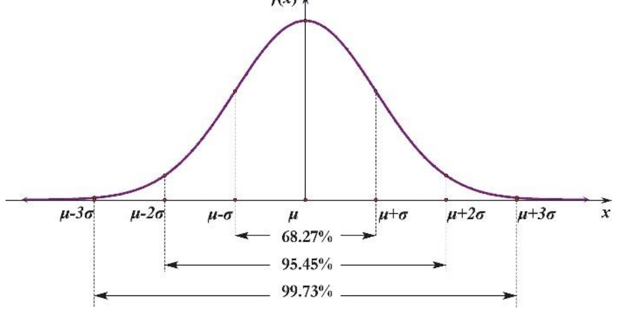
где су $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0, +\infty)$, константе

$EX = \mu$, $DX = \sigma^2$

Одговарајућа функција расподеле:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

График густине расподеле и σ-правила:



(Стандардна) Кошијева расподела

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

EX, DX не постоје

Одговарајућа функција расподеле:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$$

График функције расподеле: