Условна расподела.

У оквиру 6. питања било је речи о (условној) расподели условне сл. величине $X|\,Y = y_j$, при чему је $P\{Y = y_j\} > 0$, у случају када је (X, Y) дискретан дводимензиони сл. вектор.

Нека је сада (X, Y) дводимензиони сл. вектор апсолутно непрекидног типа са (заједничком) густином расподеле $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$. Тада су и саме компоненте X и Y апсолутно непрекидне случајне величине са (маргиналним) густинама расподеле $f_X(\cdot)$ и $f_Y(\cdot)$, редом. Формула за одређивање густине $f_Y(\cdot)$ (а потпуно аналогно и за $f_X(\cdot)$) изводи се на следећи начин:

- функција расподеле $F_Y(\cdot)$ сл. величине Y дата је са

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \in \mathbb{R},\, Y \le y\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dv\, du, \quad y \in \mathbb{R}$$

- диференцирањем ове функције по промењивој y добија се густина расподеле $f_Y(\cdot)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, du, \quad y \in \mathbb{R}$$

Разматра се (условна) расподела условне сл. величине $X|\,Y = y$, при чему се претпоставља да је функција $f_Y(\cdot)$ непрекидна и позитивна у фиксираној тачки $y \in \mathbb{R}$. У овом разматрању проблем који се појављује јесте што условна вероватноћа $P\{X \le x|\,Y = y\}$ није дефинисана, с обзиром на чињеницу да догађај у услову има вероватноћу 0. Зато се поступа на следећи начин:

- за свако $\Delta y > 0$ важи

$$P\{X \le x|\, y - \Delta y < Y \le y + \Delta y\} = \frac{P\{X \le x,\, y - \Delta y < Y \le y + \Delta y\}}{P\{y - \Delta y < Y \le y + \Delta y\}} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f(u, v)\, dv\, du}{\displaystyle\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f_Y(v)\, dv}$$

- при $\Delta y \to 0+$ важи

$$\lim_{\Delta y \to 0+} P\{X \le x|\, y - \Delta y < Y \le y + \Delta y\} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u, y)\, du}{f_Y(y)}$$

- функција $F_{X|\,Y=y} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ дефинисана са

$$F_{X|\,Y=y}(x) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u, y)\, du}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  назива се (условна) функција расподеле условне сл. величине $X|\,Y = y$
  Важи

$$P\{X \le x|\,Y = y\} \overset{\text{def}}{=} F_{X|\,Y=y}(x).$$

- условна сл. величина $X|\,Y = y$ је апсолутно непрекидног типа (као и X), па се диференцирањем горње функције расподеле, по промењивој x, добија (условна) густина расподеле $f_{X|\,Y=y}(\cdot)$

$$f_{X|\,Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$