1. Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних сл. величина тако да $X_n \in \mathcal{U}(-a_n, a_n)$, $0<a_n<a$, $n\in\mathbb{N}$. Проверити:

а) Ако је $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$, онда низ (X_n) не испуњава Линдебергов услов.

б) Ако је $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = +\infty$, онда за низ (X_n) важи ЦГТ.

Решење:

а) Заправо, проверава се важење услова:

$$\frac{1}{B_n^2}\Big(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\substack{|x-0|\ge \varepsilon B_n\\ |x|\le a_j}} x^2\cdot\frac{1}{2a_j}\,dx\Big) \overset{(*)}{\longrightarrow} 0, \text{ при } n\to+\infty, \text{ и за } \forall\varepsilon>0$$

носач униформне расподеле $\mathcal{U}(-a_j,a_j)$

$j\in\mathbb{N}$

$$EX_j = \frac{-a_j+a_j}{2} = 0$$

$$DX_j = EX_j^2 = \int_{-a_j}^{a_j} x^2\cdot\frac{1}{2a_j}\,dx = \frac{1}{2a_j}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-a_j}^{a_j} = \frac{a_j^2}{3}$$

при чему је

$$B_n^2 = DS_n \underset{\text{нез}}{=} \sum_{j=1}^{n} DX_j = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 < +\infty \quad \Big(\text{на основу пт. } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2<+\infty\Big)$$

Дакле, очигледно, низ (B_n^2) конвергира, нпр. $B_n^2\to B$, при $n\to+\infty$,

па се може одабрати $\varepsilon>0$ тд.

$$\varepsilon\sqrt{B} < a_1$$

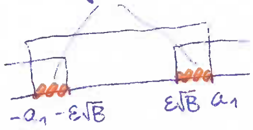
па је тиме

$$\int\limits_{\substack{|x|\ge\varepsilon B_n\\ |x|\le a_1}} x^2\cdot\frac{1}{2a_1}\,dx > 0$$

јер је и

$$\int\limits_{\substack{|x|\ge\varepsilon\sqrt{B}\\ |x|\le a_1}} x^2\cdot\frac{1}{2a_1}\,dx > 0$$

домен интеграције



$\Rightarrow$ (*) НЕ ВАЖИ

б) $B_n^2 = \frac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \to +\infty$, при $n\to+\infty$ (на основу пт. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = +\infty$)

за довољно велико n_0: $\varepsilon B_n > a$ за $\forall n\ge n_0$, $n_0(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ (*) ВАЖИ $\Rightarrow$ ВАЖИ ЦГТ

$\triangle$

2. Испитати да ли за низ независних сл. величина $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи услов Љапунова, ако (X_n) има закон расподеле

$$X_n:\begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n\\ \frac{1}{4^n} & 1-\frac{2}{4^n} & \frac{1}{4^n}\end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}.$$

Решење:

$EX_j = 0 \qquad j\in\mathbb{N}$

$DX_j = EX_j^2 = 2$

$$B_n^2 = DS_n \underset{\text{нез}}{=} \sum_{j=1}^{n} DX_j = 2n$$

$$\Rightarrow B_n^{2+\delta} = (B_n^2)^{1+\frac{\delta}{2}} = (2n)^{1+\frac{\delta}{2}}$$

Затим је $\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^{2+\delta}\,dF_j(x) = E(|X_j|^{2+\delta})$

$$|X_j|^{2+\delta}:\begin{pmatrix} 0 & 2^{j(2+\delta)}\\ 1-\frac{2}{4^j} & \frac{2}{4^j}\end{pmatrix} \Rightarrow E(|X_j|^{2+\delta}) = \frac{2^{j(2+\delta)}\cdot 2}{4^j} = 2^{j\delta+1}, \ j\in\mathbb{N},\ \delta>0$$

$$\sum_{j=1}^{n} E(|X_j|^{2+\delta}) = \sum_{j=1}^{n} 2^{j\delta+1}$$

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n} E(|X_j|^{2+\delta}) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} 2^{j\delta+1}}{(2n)^{1+\frac{\delta}{2}}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} 2^{j\delta+1-\cancel{1}-\frac{\delta}{2}}}{n^{1+\frac{\delta}{2}}} = \frac{2^{-\frac{\delta}{2}}\sum\limits_{j=1}^{n}(2^\delta)^j}{n^{1+\frac{\delta}{2}}} \longrightarrow +\infty \text{ за било које } \delta>0$$

$\Rightarrow$ услов није испуњен.

$\triangle$

3. Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ простор елементарних исхода неког сл. експеримента, и нека је $p(\omega_k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, $k\in\mathbb{N}$. Низ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сл. величина дефинисан је са:

$$X_n(\omega_k) = \begin{cases} k, & n=k \\ 0, & n\neq k \end{cases}$$

а низ $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са

$$Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$$

Испитати све врсте конвергенција оба два низа.

Решење:

$$X_n : \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1-\frac{6}{\pi^2 n^2} & \frac{6}{\pi^2 n^2} \end{pmatrix}, \quad n\in\mathbb{N}$$

Испитују се све врсте конвергенције низа (X_n) ка 0.

$\varepsilon > 0$ фиксирано

$$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \underset{(\text{за } \varepsilon \leq n)}{=} \frac{6}{\pi^2 n^2} \to 0, \text{ при } n\to+\infty$$

$$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \underset{(\text{за } \varepsilon > n)}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{P} 0, \text{ при } n\to+\infty} \Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{D} 0, \text{ при } n\to+\infty}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\{|X_n|\geq\varepsilon\} \leq \sum_{n=[\varepsilon]}^{+\infty} P\{X_n=n\} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P\{X_n=n\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2} < +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{c.c.} 0, \text{ при } n\to+\infty}$$

$$EX_n^2 = \frac{6}{\pi^2} \not\to 0, \text{ при } n\to+\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \overset{c.к.}{\not\to} 0, \text{ при } n\to+\infty}$$

$$Y_n : \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & 1 \\ \frac{6}{\pi^2 n^2} & 1-\frac{6}{\pi^2 n^2} \end{pmatrix}$$

Испитују се све врсте конвергенције низа (Y_n) ка 1.

Из $X_n \xrightarrow{c.c.} 0$, при $n\to+\infty$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{X_n}{n^2} \xrightarrow{c.c.} 0, \text{ при } n\to+\infty \\ &1-\frac{X_n}{n^2} \xrightarrow{c.c.} 1, \text{ при } n\to+\infty \end{aligned}\right\} \text{ Показати!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &Y_n \xrightarrow{c.c.} 1, \text{ при } n\to+\infty \\ &Y_n \xrightarrow{P} 1, \text{ при } n\to+\infty \\ &Y_n \xrightarrow{D} 1, \text{ при } n\to+\infty \end{aligned}}$$

$$E(Y_n-1)^2 = \frac{6}{\pi^2 (n^2)^2} \to 0, \text{ при } n\to+\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow{c.к.} 1, \text{ при } n\to+\infty}$$

5. Нека сл. величина $X \in U[0,1]$ и нека је дат низ сл. величина $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан са

$$X_n = X + I\{X < \tfrac{1}{n}\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Испитати конвергенцију низа (X_n).

Решење:

$I\{X<\frac{1}{n}\}$ Бернулијева сл. величина са законом расподеле

$$I\{X<\tfrac{1}{n}\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{n} & \underset{P\{X<\frac{1}{n}\}}{\frac{1}{n}} \end{pmatrix}$$

Има смисла испитивати све врсте конвергенција низа (X_n) ка сл. величини X.

$\varepsilon > 0$ фиксирано

$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = P\{\cancel{X} + I\{X < \frac{1}{n}\} - \cancel{X} \geq \varepsilon\} = P\{I\{X < \frac{1}{n}\} \geq \varepsilon\} \underset{(\text{за } \varepsilon \leq 1)}{=} P\{I\{X < \frac{1}{n}\} = 1\} = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to +\infty$

$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \underset{(\text{за } \varepsilon > 1)}{=} 0$

$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{P} X, \text{ при } n \to +\infty}$

$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{D} X, \text{ при } n \to +\infty}$

$P\{\lim\limits_{n \to +\infty} (X + I\{X < \frac{1}{n}\}) = X\} = P\{\lim\limits_{n \to +\infty} I\{X < \frac{1}{n}\} = 0\} = 1$ јер $I\{X < \frac{1}{n}\} \xrightarrow{c.c.} 0$, при $n \to +\infty$, зато што $P\{X > 0\} = 1$

$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{c.c.} X, \text{ при } n \to +\infty}$

$E(X_n - X)^2 = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to +\infty$

$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{c.k.} X, \text{ при } n \to +\infty}$ ▲

5. Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних сл. величина са законом расподеле

$$X_n : \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{3}{(n+1)^2} & & \frac{2}{(n+1)^2} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Испитати све четири врсте конвергенција низа (X_n).

Решење:

Испитује се конвергенција низа (X_n) ка 0.

$\varepsilon > 0$ фиксирано

$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \underset{(\text{за } \varepsilon \leq n)}{=} P\{X_n = -n\} + P\{X_n = n\} = \frac{5}{(n+1)^2} \to 0$, при $n \to +\infty$

$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \underset{(\text{за } \varepsilon > n)}{=} 0$

$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{P} 0, \text{ при } n \to +\infty}$ $\boxed{X_n \xrightarrow{D} 0, \text{ при } n \to +\infty}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \leq \sum\limits_{n=[\varepsilon]}^{+\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty$

$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{c.c.} 0, \text{ при } n \to +\infty}$

$EX_n^2 = n^2 \cdot \frac{5}{(n+1)^2} \to 5$, при $n \to +\infty$

$\boxed{X_n \overset{c.k.}{\nrightarrow} 0, \text{ при } n \to +\infty}$ ▲

6. Дат је низ независних сл. величина $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, са законом расподеле

$$X_j : \begin{pmatrix} -j^2 & -j & 0 & j & j^2 \\ \frac{1}{12j^2} & \frac{1}{12} & 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6j^2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12j^2} \end{pmatrix} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Доказати да за дати низ не важи Линдебергов услов.

Решење:

$EX_j = 0 \qquad j \in \mathbb{N}$

$DX_j = EX_j^2 = \frac{2j^4}{12j^2} + \frac{2j^2}{12} = \frac{j^2}{3}$

$B_n^2 = DS_n \underset{\text{нез}}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} DX_j = \frac{1}{3} \sum\limits_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18}$

$\frac{1}{B_{2n}^2} \sum\limits_{j=1}^{2n} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon B_{2n}} x^2 dF_j(x) \geq \frac{1}{B_{2n}^2} \sum\limits_{j=n+1}^{2n} \frac{2j^4}{12j^2} = \frac{18}{2n(2n+1)(4n+3)} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{7n+1}{4n+3} \geq \frac{1}{3}$

за фиксирано $\varepsilon > 0$, може се одредити $n_0 = n_0(\varepsilon)$ тд. за $\forall n \geq n_0$ важи неједнакост $n^2 \geq \varepsilon B_{2n}$ тј. $\varepsilon \leq \frac{n^2}{B_{2n}}$

$\Rightarrow$ Не важи Линдебергов услов. ▲