1. задатак са вежби - 3 машине, 2 техничара

Решење:

$\{X(t), t\geq 0\}$ - ланац Маркова са непрекидним временом

$S=\{0,1,2,3,4,5\}$

0 - не ради ниједна машина

1 - ради једна машина за коју је задужен техничар A

2 - 〃 〃 B

3 - раде обе машине за које је задужен техничар A

4 - ради машина за коју је задужен техничар B и једна од машина за коју је задужен техничар A

5 - раде (исправне су) све три машине

$p_{00}(h)=1-2\mu h+o(h)$

$p_{10}(h)=\lambda h+o(h)$

$p_{20}(h)=\lambda h+o(h)$

$p_{01}(h)=\mu h+o(h)$

$p_{11}(h)=1-(\lambda+2\mu)h+o(h)$

$p_{31}(h)=2\lambda h+o(h)$

$p_{41}(h)=\lambda h+o(h)$

$p_{02}(h)=\mu h+o(h)$ $\quad p_{22}(h)=1-(\lambda+\mu)h+o(h)$

$p_{42}(h)=\lambda h+o(h)$

$p_{13}(h)=\mu h+o(h)$ $\quad p_{33}(h)=1-(2\lambda+\mu)h+o(h)$

$p_{53}(h)=\lambda h+o(h)$

$p_{14}(h)=\mu h+o(h)$ $\quad p_{44}(h)=1-(2\lambda+\mu)h+o(h)$

$p_{24}(h)=\mu h+o(h)$

$p_{54}(h)=2\lambda h+o(h)$

$p_{35}(h)=\mu h+o(h)$ $\quad p_{55}(h)=1-3\lambda h+o(h)$

$p_{45}(h)=\mu h+o(h)$

систем ДЈ:

$$
\begin{aligned}
P_0'(t)&=-2\mu P_0(t)+\lambda P_1(t)+\lambda P_2(t)\\
P_1'(t)&=\mu P_0(t)-(\lambda+2\mu)P_1(t)+2\lambda P_3(t)+\lambda P_4(t)\\
P_2'(t)&=\mu P_0(t)-(\lambda+\mu)P_2(t)+\lambda P_4(t)\\
P_3'(t)&=\mu P_1(t)-(2\lambda+\mu)P_3(t)+\lambda P_5(t)\\
P_4'(t)&=\mu P_1(t)+\mu P_2(t)-(2\lambda+\mu)P_4(t)+2\lambda P_5(t)\\
P_5'(t)&=\mu P_3(t)-3\lambda P_5(t)+\mu P_4(t)
\end{aligned}
$$

стационарне (истовремено и граничне) вероватноће, при $t\to+\infty$

$$
\begin{aligned}
0&=-2\mu p_0^*+\lambda p_1^*+\lambda p_2^*\\
0&=\mu p_0^*-(\lambda+2\mu)p_1^*+2\lambda p_3^*+\lambda p_4^*\\
0&=\mu p_0^*-(\lambda+\mu)p_2^*+\lambda p_4^*\\
0&=\mu p_1^*-(2\lambda+\mu)p_3^*+\lambda p_5^*\\
0&=\mu p_3^*+\mu p_4^*-3\lambda p_5^*\\
1&=\sum_{i=0}^{5}p_i^*
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p_0^*=\frac{2\lambda^3}{\mu^3+3\mu^2\lambda+4\mu\lambda^2+2\lambda^3}\qquad p_3^*=\frac{\mu^2\lambda}{\mu^3+3\mu^2\lambda+4\mu\lambda^2+2\lambda^3}$$

$$p_1^*=\frac{2\mu\lambda^2}{\mu^3+3\mu^2\lambda+4\mu\lambda^2+2\lambda^3}\qquad p_4^*=\frac{2\mu^2\lambda}{\mu^3+3\mu^2\lambda+4\mu\lambda^2+2\lambda^3}$$

$$p_2^*=\frac{2\mu\lambda^2}{\mu^3+3\mu^2\lambda+4\mu\lambda^2+2\lambda^3}\qquad p_5^*=\frac{\mu^3}{\mu^3+3\mu^2\lambda+4\mu\lambda^2+2\lambda^3}$$

Гледано на дуже стазе, за велике вредности t, вероватноћа (асимптотска) да је:

- нула машина исправно је $\boxed{p_0^*}$
- тачно једна машина исправна је $\boxed{p_1^*+p_2^*}$
- тачно две машине исправно је $\boxed{p_3^*+p_4^*}$
- тачно три машине исправно је $\boxed{p_5^*}$

△

$\boxed{2.}$ Нека је $0>X\in L^2$, $Y(t)=e^{tX}$, $0\le t\le 1$. Доказати да је процес $\{Y(t), t\in[0,1]\}$ L^2-диференцијабилан.

Решење:

Нека је $0<t<1$ (слично, и једноставније за $t=0$, односно $t=1$)

При $h\to 0$

$$\frac{Y(t+h)-Y(t)}{h}=\frac{e^{(t+h)X}-e^{tX}}{h}=e^{tX}\cdot\overbrace{\frac{e^{hX}-1}{h}}^{\to X}\ \overset{?}{\xrightarrow{L^2}}\ \underline{Xe^{tX}},\ \text{при } h\to 0$$

кандидат за L^2 граничну вредност

• $h\to 0+$

Требало би доказати

$$E\left|Xe^{tX}\left(\frac{e^{hX}-1}{hX}-1\right)\right|^2\to 0,\ \text{при } h\to 0+$$

Ознака: $u:=-hX>0$

Тада: $$\left(\frac{e^{-u}-1}{-u}-1\right)^2=\left(\frac{e^{-u}-1+u}{-u}\right)^2=\left(\frac{\cancel{1}-\cancel{u}+\frac{u^2}{2}-\cancel{1}+\cancel{u}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-u)^n}{n!}}{-u}\right)^2\le u^2$$

Маклоренов ред

Дакле,

$$E\left(X^2e^{2tX}\left(\frac{e^{hX}-1}{hX}-1\right)^2\right)\le E(X^2e^{2tX}h^2X^2)=h^2E(X^2e^{2tX}\cdot X^2)\le h^2E(X^2C)=Ch^2\underbrace{EX^2}_{<+\infty}\to 0,\ \text{при } h\to 0+$$

C је const, нпр. $\frac{1}{(te)^2}$ *

$<+\infty$ јер по пр. $X\in L^2$

* $|e^{tX}\cdot X|=\left|-\frac{1}{t}(e^{tX}\cdot(-tX))\right|\le\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{e}$

максимум ф-је $e^{-y}\cdot y$, $y\ge 0$

• $h\to 0-$

Ознака: $v:=hX>0$

$$\frac{e^v-1}{v}-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v^n}{n!}\cdot\frac{1}{v}-1=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{v^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v^n}{(n+1)!}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v^n}{(n-1)!}=\underline{ve^v}$$

Дакле,

$$E\left(X^2e^{2tX}\left(\frac{e^{hX}-1}{hX}-1\right)^2\right)\le E(X^2e^{2tX}\cdot h^2X^2e^{2hX})=h^2E(X^2\underbrace{e^{2X(t+h)}}_{\le e^{2tX}\le e^{tX}}\cdot X^2)\le h^2E(X^2e^{tX}\cdot X^2)\quad (X<0)$$

$$\le h^2E(X^2C)=Ch^2EX^2\to 0\ \text{при } h\to 0-$$

C је const, нпр. $\left(\frac{2}{te}\right)^2$ **

** $|e^{-tX}\cdot X^2|\le\frac{4}{(te)^2}$

максимум ф-је $e^{-tx}\cdot x^2$, $x\ge 0$

Испитати L^2-непрекидност!

△

$\boxed{3.}$ Колико је пута L^2-диференцијабилан стационаран сл. процес $\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$, ако је његова корелациона ф-ја $K(t) = (1+|t|+\frac{t^2}{3})e^{-|t|}$.

Решење:

• Ако постоји $K^{(2n)}(0)$, а не постоји $K^{(2n+2)}(0)$ $\rightsquigarrow$ процес је n пута L^2-диференцијабилан

ознаке: $\varphi(t) := (1+t+\frac{t^2}{3})e^{-t}, \ t\geq 0$

$\psi(t) := (1-t+\frac{t^2}{3})e^{t}, \ t\leq 0$

Ради се развој у ред у околини $t=0$.

$$\varphi(t) = (1+t+\frac{t^2}{3})(1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^5}{120}+\cdots)$$

$$= 1+\cancel{t}+\frac{t^2}{3}-\cancel{t}-t^2-\cancel{\frac{t^3}{3}}+\frac{t^2}{2}+\cancel{\frac{t^3}{2}}+\cancel{\frac{t^4}{6}}-\cancel{\frac{t^3}{6}}-\cancel{\frac{t^4}{6}}-\frac{t^5}{18}+\frac{t^4}{24}+\frac{t^5}{24}+\frac{t^6}{72}-\frac{t^5}{120}-\frac{t^6}{120}-\cdots$$

$$= 1-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^5}{45}+\cdots$$

$$\psi(t) = \cdots = 1-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{24}+\frac{t^5}{45}+\cdots$$

У тачки $t=0$ φ и ψ имају прва четири извода једнака док је $\varphi^{(V)}(0)\neq\psi^{(V)}(0)$

Како је $\varphi(t)=K(t)$ за $t\geq 0$, а $\psi(t)=K(t)$ за $t\leq 0$ следи да постоје

$K'(0), K''(0), K'''(0), K^{(IV)}(0)$

а не постоји $K^{(V)}(0)$ (леви и десни извод се разликују)

$\Rightarrow$ Процес $\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$ је два пута L^2-диференцијабилан.