1. Случајна величина X представља број бацања новчића, ако се са бацањем завршава онда када два пута узастопно падне "Г". Претпоставља се да је новчић фаличан, тј. нехомоген. Одредити EX.

Решење применом ланца Маркова са дискретним временом

Интуитивно, сасвим је јасно да би требало водити рачуна о броју узастопних "Г", или, другим речима, "гувати" резултат последњег бацања. Ако се последње бацање завршило исходом "П" број "Г" је постављен на нулу; ако се последње бацање завршило исходом "Г" број "Г" се увећава за један. Наравно када број "Г" достигне вредност два игра се завршава.

Ситуацију се може моделирати ланцем Маркова са три стања.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $S=\{0,1,2\}$ (X_n - број узастопних "Г" закључно са n-тим бацањем)

$0 :=$ број узастопних "Г" једнак је нули

$1 :=$ - " - један

$2 :=$ - " - два

Матрица вероватноћа прелаза за један корак је.

$p :=$ вероватноћа падања "Г" у једном бацању

$q := 1-p$

$p \neq q$ (новчић је фаличан)

$$A = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

стање 2 је апсорбујуће, када се у њега уђе у њему се остаје
⇝ игра се завршава и нема више бацања

Нека је $u := E(X \mid X_1 = 0) - 1$ * јер је у услову већ урачунато прво бацање

$v := E(X \mid X_1 = 1) - 1$

$$\left.\begin{aligned} u &= q(1+u) + p(1+v) \\ v &= q(1+u) + p\cdot 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} u &= 1 + qu + pv \\ v &= 1 + qu \end{aligned}$$

решење система: $\boxed{u = \frac{1+p}{p^2} \quad v = \frac{1}{p^2}}$

$$\begin{aligned} EX &= E(E(X \mid X_1)) \\ &= q(u+1) + p(v+1) \\ &= 1 + qu + pv = 1 + \frac{1-p^2}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{p^2 + 1 - p^2 + p}{p^2} = \frac{1+p}{p^2} \end{aligned}$$

△