1. (357, 358 - збирка)

Нека је дато сл. лутање $\{X_n, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$.

(а) Одредити расподелу сл. величине X_n и EX_n.

(б) Нека је

T_r - временски тренутак првог достизања нивоа r, за $r\geq 1$ $\qquad T_r=\inf\{n\geq 1: X_n=r\}$

T_0 - временски тренутак првог повратка у 0 $\qquad T_0=\inf\{n\geq 1: X_n=0\}$

Одредити генераторну ф-ју сл. величина T_r, T_0.

(а) $X_n:\begin{pmatrix} -n & -(n-1) & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & n-1 & n \\ & & & & & & & & \end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$ $\qquad (X_0=0)$

- $P\{X_n=m\}=0$, ако су m и n различите парности; $m\in\{-n,-(n-1),\dots,-1,0,1,\dots,n\}$
- $P\{X_n=m\}=\binom{n}{\frac{n+m}{2}}p^{\frac{n+m}{2}}q^{\frac{n-m}{2}}$, ако су m и n исте парности

$l:=$ број корака улево (на горе)

$d:=$ број корака удесно (на доле)

$l+d=n$

$\underline{1\cdot l-1\cdot d=m}$

$l=\frac{n+m}{2}$

$d=\frac{n-m}{2}$

$EX_n=E\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)=\sum_{k=1}^{n}EY_k=n(p-q)$, $n\in\mathbb{N}$

$Y_k:\begin{pmatrix}-1 & 1\\ q & p\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{N}$

(б) $f_r(n):=P\{T_r=n\mid X_0=0\}$ $(=P\{T_r=n\}$ јер је $X_0=0$ са вероватноћом 1)

$=P\{X_1\neq r, X_2\neq r,\dots,X_{n-1}\neq r, X_n=r\mid X_0=0\}$, за $r\geq 0$, $n\geq 1$

$f_r(0)=0$ за $\forall r\geq 0$

$G_r(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_r(n)s^n$ - генераторна ф-ја низа $(f_r(n))$, тј. сл. величине T_r, $r\geq 0$

Треба приметити да је $G_0(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_0(n)$ вероватноћа да ће се ланац ИКАДА вратити у стање 0.
Помоћу овога може се одредити да ли је стање 0 повратно или пролазно.
Наиме, ако је $G_0(1)=1$ стање 0 је повратно, у супротном је пролазно.

- $G_r(s)$, $r>1$

$f_r(n)=P\{T_r=n\}$

$=\sum_{k=1}^{n-1}P\{T_r=n\mid T_1=k\}\cdot P\{T_1=k\}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{time \& spatial}\\ \text{homogeneity}}}{=}\sum_{k=1}^{n-1}f_{r-1}(n-k)f_1(k)=\sum_{k=0}^{n}f_{r-1}(n-k)f_1(k)$ $\qquad /\cdot s^n \quad /\sum_{n=0}^{+\infty}$

ф-ла потпуне вероватноће; као услов се задаје T_1

јер је $f_r(0)=0$ за $\forall r\geq 0$

Из последње једнакости види се да је $(f_r(n))$ конволуција два низа $(f_{r-1}(n))$ и $(f_1(n))$.
Постоји својство генераторне ф-је, које се односи на конволуције

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)s^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}a_kb_{n-k}s^n=\sum_{k=0}^{+\infty}a_ks^k\sum_{n=k}^{+\infty}b_{n-k}s^{n-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}a_ks^k\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}b_ns^n$$

Fubini: за промену поретка сумације

$\Rightarrow G_r(s)=G_{r-1}(s)\cdot G_1(s)$

Затим се $G_{r-1}(s)$ разложи на аналоган начин итд.

Углавном: $\boxed{G_r(s)=[G_1(s)]^r,\ r>1}$

- $G_1(s)$

$f_1(n)=P\{T_1=n\}$

$\underset{n>1}{=}P\{T_1=n\mid X_1=1\}\cdot P\{X_1=1\}+P\{T_1=n\mid X_1=-1\}\cdot P\{X_1=-1\}$

ф-ла потпуне вероватноће; као услов се задаје X_1

$= 0 \cdot p + P\{$први достизање нивоа 1 десно се након $n-1$ корака $| X_0 = -1\} \cdot q$

јер $X_1 = 1 \Rightarrow T_1 = 1$
тј. $T_1 \neq n$ за $n > 1$

time homogeneity

$= 0 + f_2(n-1)\, q$

spatial homogeneity

Дакле,

$f_1(n) = q f_2(n-1), \; n > 1$ $\quad / \cdot s^n \; / \sum_{n=0}^{+\infty}$

$f_1(1) = p$

$G_1(s) = 0 + ps + qs \sum_{n=1}^{+\infty} f_2(n)$

$= ps + qs\, G_2(s)$

$= ps + qs [G_1(s)]^2$

Решавањем квадратне једначине, добија се:

$G_1(s) = \frac{1 + \sqrt{1-4pqs^2}}{2sq} \quad \vee \quad G_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2sq}$

за генераторну ф-ју важи $G_1(0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{G_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2sq}}$

• $G_0(s)$

Уведу се ознаке $p_0(n) := P\{X_n = 0 | X_0 = 0\}$ $(= P\{X_n = 0\}$ јер је $X_0 = 0$ са вероватноћом 1$)$, $n \geq 0$ $\quad (p_0(0) = 1)$

$P_0(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_0(n) s^n$ – генераторна ф-ја низа $(p_0(n))$

$p_0(n) = P\{X_n = 0\}$

$= \sum_{k=1}^{n} P\{X_n = 0 | T_0 = k\} \cdot P\{T_0 = k\}$

ф-ла потпуне вероватноће; као услов се додаје T_0

$= \sum_{k=1}^{n} p_0(n-k) \cdot f_0(k) \quad / \cdot s^n \; / \sum_{n=1}^{+\infty}$

time & spatial homogeneity

Из последње једнакости види се да је $(p_0(n))$ конволуција

$P_0(s) = 1 + P_0(s)\, G_0(s)$ $\quad$ изједначавањем $\Rightarrow \boxed{G_0(s) = 1 - \sqrt{1-4s^2pq}}$

$p_0(0)$

$P_0(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{2k}{k} (pq)^k s^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{2k}{k} (s^2pq)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} (s^2pq)^k = \frac{1}{\sqrt{1-4s^2pq}}$

Вероватноћа да се честица икада врати у 0 је:

$G_0(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(n) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{(p-q)^2} = 1 - |p-q|$

$= 1$, за $p = q = \frac{1}{2}$, тј. стање 0 је повратно

< 1, за $p \neq \frac{1}{2}$, — " — пролазно

У случају $p = q = \frac{1}{2}$ (симетрично сл. лутање), очекивано време до првог повратка у 0 је

$G_0'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n f_0(n) = +\infty = E\,T_0$, тј. стање 0 је нул-повратно (као и сва остала стања).

▲

$\boxed{2}$ **(362 - збирка)**

(а) $P_0(t+h) = P_0(t)\cdot(1-\lambda h) + o(h)$

$P_1(t+h) = P_0(t)\lambda h + P_1(t)(1-\lambda h) + o(h)$

$\vdots$

$P_k(t+h) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda h + P_k(t)(1-\lambda h) + o(h)\ ,\ k\in\mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{aligned}&P_0'(t) = -\lambda P_0(t)\\ &P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t)\ ,\ k\in\mathbb{N}\end{aligned}}$$

(б)

Из једначине

$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$

добија се

$P_0(t) = Ce^{-\lambda t}$.

Почетни услов, дат у поставци задатка, је $X(0)=0$.

То значи

$P_0(0) = 1$

$\to P_0(0) = C$

$\Rightarrow \boxed{C=1}$

па је, према томе

$\boxed{P_0(t) = e^{-\lambda t}}\ (= P\{X(t)=0\})$

Методом генераторних ф-ја.

$\dfrac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t)\ ,\ k\geq 1 \quad /\cdot s^k / \sum\limits_{k=1}^{+\infty}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{dP_k(t)}{dt} s^k = \lambda s \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k(t)s^k - \lambda \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P_k(t)s^k$

равном. конв. реда $\Rightarrow$

$\dfrac{d}{dt}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P_k(t)s^k = \lambda s \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k(t)s^k - \lambda \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P_k(t)s^k$

Означ. се са $G(s,t)$ - генераторна ф-ја низа $(P_k(t))$ $\quad \left(G(s,t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k(t)s^k\right)$

$\dfrac{d}{dt}\left(G(s,t) - P_0(t)\right) = \lambda s G(s,t) - \lambda\left(G(s,t) - P_0(t)\right)$

$\dfrac{d}{dt}G(s,t) + \cancel{\lambda e^{-\lambda t}} = \lambda s G(s,t) - \lambda G(s,t) + \cancel{\lambda P_0(t)}$

$\dfrac{d}{dt}G(s,t) = (\lambda s - \lambda)G(s,t)$

$\Rightarrow G(s,t) = C_1 e^{(\lambda s - \lambda)t}$

$G(1,t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k(t) \overset{*}{=} 1$ јер су то вероватноће из закона расподеле за $X(t)$

$\to$ изједначавањем се добија $\boxed{C_1 = 1}$

$\Rightarrow G(s,t) = e^{-\lambda t}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda s t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot s^k$

Како је $G(s,t)$ генераторна ф-ја низа $(P_k(t))$, следи да је $P_k(t)$ једнак члану у развоју уз степен s^k горње ф-је, тј.

$$\boxed{P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k\geq 0}$$

$\Rightarrow \boxed{X(t) \in \mathcal{P}(\lambda t)}$

▲

$\boxed{3}$ **(са вежби)**

Нека је U сл. величина са $U[0,1]$ расподелом и $\xi_1, \xi_2, \dots$ низ независних сл. величина, и независних од U, т.д.

$$\xi_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ и нека је } X(n) = \frac{1}{2^n}\left(U + \xi_1 + 2\xi_2 + \dots + 2^{n-1}\xi_n\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

(а)

(б)

(в) Одредити спектралну густину процеса $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$.

(в) Када се одреди спектрална густина, може се проверити да ли је то добро урађено.

Овде је израчунато:

$$f(\lambda) = \frac{1}{8\pi(5-4\cos\lambda)}, \quad -\pi \le \lambda \le \pi$$

Провера: (користе се, поред осталог, и Фуријеови интеграли)

$$K(n) = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \cdot \frac{1}{8\pi(5-4\cos\lambda)}\, d\lambda}_{\text{Herglotz}} = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\lambda}{8\pi(5-4\cos\lambda)}\, d\lambda}_{\text{Euler-ова формула}} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\lambda}{5-4\cos\lambda}\, d\lambda$$

$$\bullet \ \frac{1}{5-4\cos x} = \frac{1}{5-2(e^{ix}+e^{-ix})} \underset{\substack{\text{смена} \\ z:=e^{ix}}}{=} \frac{1}{5-2(z+\frac{1}{z})} = \frac{z}{-2z^2+5z-2} \underset{\substack{\text{метода} \\ \text{неодређених} \\ \text{коефицијената}}}{=} \frac{\frac{1}{3}}{2(z-\frac{1}{2})} - \frac{\frac{2}{3}}{z-2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{(z^{-n}+z^n)}_{2\cos nx} \cdot \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n+1}}{3}\cos nx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx, \quad \Rightarrow a_n = \frac{2^{-n+1}}{3}$$

Дакле,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{5-4\cos x}\, dx \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{5-4\cos x}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{-n+1}}{3}$$

Према томе,

$$K(n) = \frac{1}{4\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{2} \cdot \frac{2^{-n+1}}{3} = \frac{2^{-n}}{12}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

▲

Задаци за вежбу:

$\boxed{4}$ Нека је скуп $\mathbb{Z}$ простор стања хомогеног ланца Маркова $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Вероватноће прелаза за један корак су:

$$k \xrightarrow{\frac{1}{3}} k+2 \ ; \quad k \xrightarrow{\frac{2}{3}} k-1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Доказати да је стање 0 повратно (односно свако стање повратно).

$\boxed{5}$ Нека је $K(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$, $C>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$. Одредити спектралну густину и испитати колико је пута процес L^2-диференцијабилан.