тј. $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ су независне, једнако расподељене сл. величине са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, за неко $n \in \mathbb{N}$

Треба показати да је сл. величина η_n независна од $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ и има, такође, $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу.

Нека су $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1} > 0$ фиксирани временски тренуци 17+

Нека је $t > 0$ фиксирано.

Посматра се условна вероватноћа:

$$P\{\eta_n \le t \mid \eta_{n-1} = t_{n-1}, \dots, \eta_0 = t_0\}$$

или, погодније,

$$P\{\eta_n > t \mid \eta_{n-1} = t_{n-1}, \dots, \eta_0 = t_0\}$$

идеја је да се покаже да ова вероватноћа (и, последично, ф-ја расподеле) не зависи од $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (што показује да је сл. величина η_n независна од $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$) и да износи $e^{-\lambda t}$

$$\{\eta_{n-1} = t_{n-1}, \dots, \eta_0 = t_0\} = \{\tau_n = s_n, \dots, \tau_2 = s_2, \tau_1 = s_1\}$$

$$\tau_k = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$s_k := t_0 + t_1 + \dots + t_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Дакле,

$P\{\eta_n > t \mid \eta_{n-1} = t_{n-1}, \dots, \eta_0 = t_0\} = P\{\eta_n > t \mid \tau_n = s_n, \dots, \tau_1 = s_1\}$ због независности прираштаја догађај $\{\eta_n > t\}$ је независан од догађаја $\{\tau_n = s_n, \dots, \tau_1 = s_1\}$ Пуасоновог процеса.

Детаљније:

Ако се реализује догађај $\{\tau_n = s_n, \dots, \tau_1 = s_1\}$ тада се догађај $\{\eta_n > t\}$ реализује акко није било регистрованих догађаја у интервалу $(s_n, s_n + t]$. Према томе,

$$P\{\eta_n > t \mid \tau_n = s_n, \dots, \tau_1 = s_1\} = P\{\xi(s_n + t) - \xi(s_n) = 0 \mid \tau_n = s_n, \dots, \tau_1 = s_1\}$$

Стога, треба изразити догађај $\{\tau_n = s_n, \dots, \tau_1 = s_1\}$ преко прираштаја процеса $\{\xi(t), t \ge 0\}$ који су дисјунктни од прираштаја $\xi(s_n + t) - \xi(s_n)$.

Дефинишу се прираштаји:

$$I_1^{(k)} = \xi\left(s_1 - \frac{1}{k}\right) - \xi(0)$$

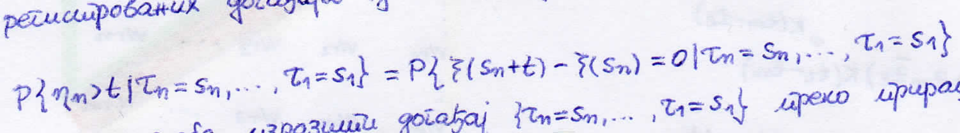
$$I_i^{(k)} = \xi\left(s_i - \frac{1}{k}\right) - \xi\left(s_{i-1} + \frac{1}{k}\right) \quad i = 2, \dots, n$$

за $k > M$, где је M ($=const$) одабрано тако да је $\frac{1}{k}$ мање од дужине најмањег интервала између два узастопна регистрована догађаја, и

$$B_i^{(k)} = \xi\left(s_i + \frac{1}{k}\right) - \xi\left(s_i - \frac{1}{k}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$B_n^{(k)} = \xi(s_n) - \xi\left(s_n - \frac{1}{k}\right)$$

за $k > M$



Прираштаји $I_1^{(k)}, B_1^{(k)}, \dots, I_n^{(k)}, B_n^{(k)}$ су на дисјунктним интервалима, који покривају цео интервал $[0, s_n]$. Дефинише се догађај

$$A_k = \{I_1^{(k)} = 0\} \cap \dots \cap \{I_n^{(k)} = 0\} \cap \{B_1^{(k)} = 1\} \cap \dots \cap \{B_n^{(k)} = 1\}$$

$A_k \subset A_{k-1}$, па је низ $\{A_k\}_{k=M}^{+\infty}$ опадајући низ догађаја и

$$\{\tau_n = s_n, \dots, \tau_1 = s_1\} = \bigcap_{k=M}^{+\infty} A_k$$

У сваком случају, за свако k догађај A_k је независан од догађаја $\{\xi(s_n + t) - \xi(s_n) = 0\}$, због прираштаја на дисјунктним интервалима.

Како је догађај $\{\xi(s_n+t)-\xi(s_n)=0\}$ независан од A_k за $\forall k$, он је независан и од (пребројивог) пресека A_k-ова.

$$P\{\eta_n>t \mid \tau_n=t_n,\dots,\tau_1=t_1\}$$

$$= P\{\xi(s_n+t)-\xi(s_n)=0 \mid \tau_n=t_n,\dots,\tau_1=t_1\} = P\Big\{\xi(s_n+t)-\xi(s_n)=0 \,\Big|\, \bigcap_{k=M}^{+\infty} A_k\Big\} \underset{\text{независности прираштаја}}{=} P\{\xi(s_n+t)-\xi(s_n)=0\}$$

$$\underset{\text{стационарности прираштаја}}{=} P\{\xi(t)=0\} = e^{-\lambda t}$$

□

$K(t)=e^{-\lambda|t|}$ за $t\neq 0$

$K(0)=a$, $a\geq 1$

ненегативна дефинитност:

Нека је: $n\in\mathbb{N}$

$z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$t_1,t_2,\dots,t_n\in\mathbb{R}$ Не умањујући општост може се шт. $t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_n$

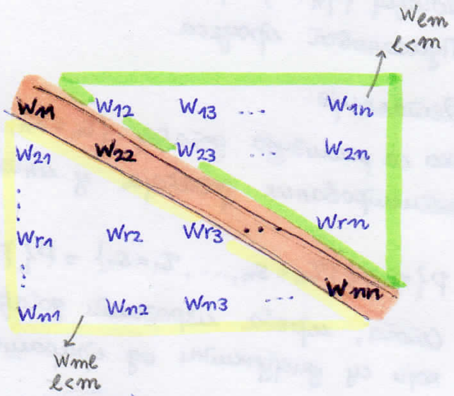
$z_k=x_k+iy_k$, $x_k,y_k\in\mathbb{R}$ $k=1,2,\dots,n$

Уведе се ознака:

$w_{rs}:=z_r K(t_r-t_s)\bar{z}_s$

и посматра

$\sum\limits_{r,s=1}^{n} z_r K(t_r-t_s)\bar{z}_s$ (треба показати да је ≥ 0)



$$\sum_{r,s=1}^{n} w_{rs} = \sum_{r=1}^{n} w_{rr} + \sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell<m}}^{n} (w_{\ell m}+w_{m\ell})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} z_r K(0)\bar{z}_r + \sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell<m}}^{n} (z_\ell\bar{z}_m+z_m\bar{z}_\ell)\underbrace{K(t_\ell-t_m)}_{=K(t_m-t_\ell)}$$

$$= a\sum_{r=1}^{n}(x_r^2+y_r^2) + 2\sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell<m}}^{n}(x_\ell x_m+y_\ell y_m)e^{-\lambda t_m}\cdot e^{\lambda t_\ell}$$

$$= \underbrace{\Big(a\sum_{r=1}^{n}x_r^2 + 2\sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell<m}}^{n} x_\ell x_m e^{-\lambda t_m}\cdot e^{\lambda t_\ell}\Big)}_{P} + \underbrace{\Big(a\sum_{r=1}^{n}y_r^2 + 2\sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell<m}}^{n} y_\ell y_m e^{-\lambda t_m}\cdot e^{\lambda t_\ell}\Big)}_{Q}$$

довољно је показати да је $P\geq 0$, јер је израз Q истог облика као и P.

Ради прегледности уведу се додатне ознаке: $\xi_\ell := e^{\lambda t_\ell}$

$\eta_\ell := \dfrac{x_\ell}{\xi_\ell}$

Због шт. $t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_n$ следи $0\leq\xi_1\leq\xi_2\leq\dots\leq\xi_n$ (*)

$$\underset{\substack{\text{јер је}\\ a\geq 1}}{P \geq} \sum_{r=1}^{n}\xi_r^2\eta_r^2 + 2\sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell<m}}^{n}\xi_\ell^2\eta_\ell\eta_m = \xi_1^2(\eta_1^2+2\eta_1\eta_2+2\eta_1\eta_3+\dots+2\eta_1\eta_n)$$

$$+\ \xi_2^2(\eta_2^2+2\eta_2\eta_3+2\eta_2\eta_4+\dots+2\eta_2\eta_n)$$

$$+\ \vdots$$

$$+\ \xi_{n-1}^2(\eta_{n-1}^2+2\eta_{n-1}\eta_n)$$

$$+\ \xi_n^2\eta_n^2$$

Даље, $\xi_n^2\eta_n^2\geq\xi_{n-1}^2\eta_n^2$ (због (*)), па за последња два сабирка у претходном изразу важи неједнакост

$$\xi_{n-1}^2(\eta_{n-1}^2+2\eta_{n-1}\eta_n)+\xi_n^2\eta_n^2 \geq \xi_{n-1}^2(\eta_{n-1}^2+2\eta_{n-1}\eta_n+\eta_n^2) = \xi_{n-1}^2(\eta_{n-1}+\eta_n)^2$$

Даље, $\xi_{n-1}^2(\eta_{n-1}+\eta_n)^2\geq\xi_{n-2}^2(\eta_{n-1}+\eta_n)^2$ (због (*)), па се групишу последња три сабирка итд.

На крају, после n таквих корака,

$$\Rightarrow \boxed{P\geq\xi_1^2(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_n)^2\geq 0}$$

△