РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 29. (са списка)

Проблем спада у групу проблема: управљање инвентаром
(inventory management)

а) X_n - ниво залиха хране након Матилдиног прегледа стања и евентуалне допуне, а пре него што Филип узме храну за пилиће

$\Rightarrow X_n \in \{b, b+1, \dots, 2b-1\}$

Према претпоставкама и опису ситуације, низ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовољава рекурентне везе

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - B_n, & \text{ако је } X_n - B_n \geq b \\ X_n - B_n + b, & \text{ако је } X_n - B_n < b \end{cases}$$

(B_n) је низ међусобно независних и једнако расподељених сл. величина

$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ је ланац Маркова (са дискретним временом) и простором стања $S = \{b, b+1, \dots, 2b-1\}$

Вероватноће прелаза за један корак одређују се на следећи начин:

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

$$\underset{\substack{\text{ф-ла} \\ \text{потпуне вероватноће}}}{=} \sum_{k=0}^{b} P\{X_{n+1} = j, B_n = k \mid X_n = i\}$$

$$\underset{\substack{\text{ф-ла} \\ \text{множења вероватноћа} \\ \text{+ независност } B_n \text{ и } X_n}}{=} \sum_{k=0}^{b} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, B_n = k\} \cdot \underbrace{P\{B_n = k\}}_{= p_k}$$

$$\underset{\substack{\text{на основу} \\ \text{рекурентне везе}}}{=} \sum_{k=0}^{b} p_k \left(I_{j=i-k,\, i-k\geq b} + I_{j=i-k+b,\, i-k<b} \right)$$

индикатори догађаја који стоје у индексу

$$\underset{\substack{\text{након} \\ \text{раздвајања} \\ \text{на две суме} \\ \text{остаје само} \\ \text{по један сабирак из сваке}}}{=} p_{i-j} \cdot I_{b\leq j\leq i} + p_{i-j+b} \cdot I_{i\leq j\leq 2b-1}$$

$$= \begin{cases} p_{i-j}, & \text{ако је } i>j \\ p_0 + p_b, & \text{ако је } i=j \\ p_{i-j+b}, & \text{ако је } i<j \end{cases}$$

$P = (p_{ij})$, где је P - $b\times b$-димензионална матрица

б) За $b=3$, $S = \{3,4,5\}$

$$P = \begin{pmatrix} p_0+p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0+p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0+p_3 \end{pmatrix}$$

Тражи се $\boxed{\mu_{53}}$

Добија се решавањем одговарајућег система линеарних једначина са две непознате.

в) Нека је $Y_n = X_n - B_n$ - количина хране n-тог дана након што је Филип нахранио пилиће, а пре него што је Матилда проверила складиште.

Тражи се

$$P\{Y_n \geq 2\} = P\{X_n = 3, B_n \leq 1\} + P\{X_n = 4, B_n \leq 2\} + P\{X_n = 5, B_n \leq 3\}$$

$$\underset{\text{независност}}{=} P\{X_n = 3\} \cdot P\{B_n \leq 1\} + P\{X_n = 4\} \cdot P\{B_n \leq 2\} + P\{X_n = 5\} \cdot P\{B_n \leq 3\}$$

$$\to \pi_3 (p_0 + p_1) + \pi_4 (p_0 + p_1 + p_2) + \pi_5 \cdot 1, \quad \text{при } n \to +\infty$$

где је $\pi = (\pi_3, \pi_4, \pi_5)$ стационарна расподела $\triangle$