Случајно лутање

10.01.'19.

ЛГлаваш

Случајно лутање
(дефиниција)

- Појављује се као стохастички модел нпр. за кретање објекта (честице), које се реализује кроз низ корака ('скокова') у случајно одабраним правцима (односно смеровима).

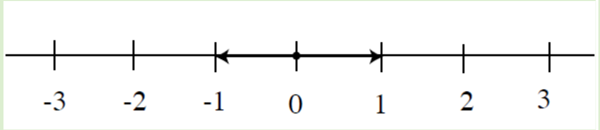
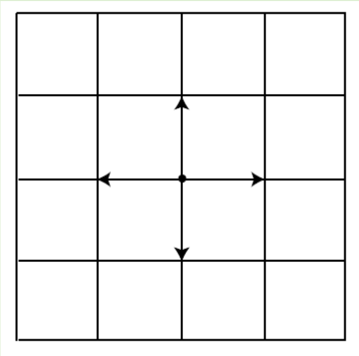
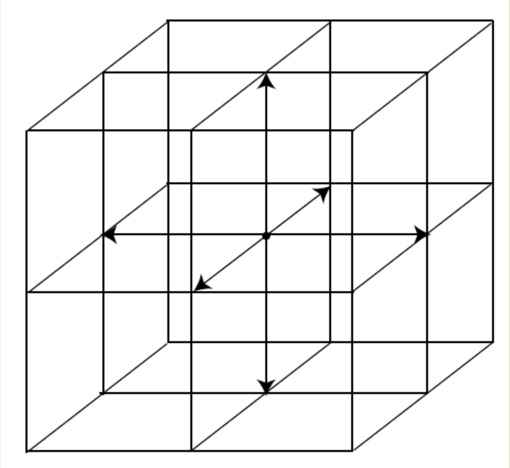
- **Деф.** Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених сл. величина.
  Нека је $S_0 = a$, $a \in \mathbb{R}$, и, за свако $n \in \mathbb{N}$, са S_n означен парцијалан збир
  $$S_n = S_0 + \sum_{j=1}^{n} X_j\,.$$
  Случајан низ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ назива се једнодимензионо случајно лутање.
  *** Надаље, $a = 0$. ***

- Ако је $(\boldsymbol{X}_n)$ низ d-димензионих случајних вектора, онда је
  $$\boldsymbol{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{X}_j\,, n \in \mathbb{N},$$
  d-димензионо случајно лутање (случајно лутање у простору $\mathbb{R}^d$).

ЛГлаваш

Просто случајно лутање
(дефиниција и визуелизација)

- Ради се о случајном лутању на d-димензионој (целобројној) решетци $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, где сл. вектор $\boldsymbol{X}_n$ узима вредности у скупу $\{\pm\boldsymbol{e}_1, \pm\boldsymbol{e}_2, \dots, \pm\boldsymbol{e}_d\}$ у складу са одређеним законом расподеле вероватноћа, а $\boldsymbol{e}_j \coloneqq (0, \dots, 0,1, 0, \dots, 0)$ је вектор у $\mathbb{Z}^d$ са јединицом на j-том месту.
- Визуелизација нпр. првог корака:

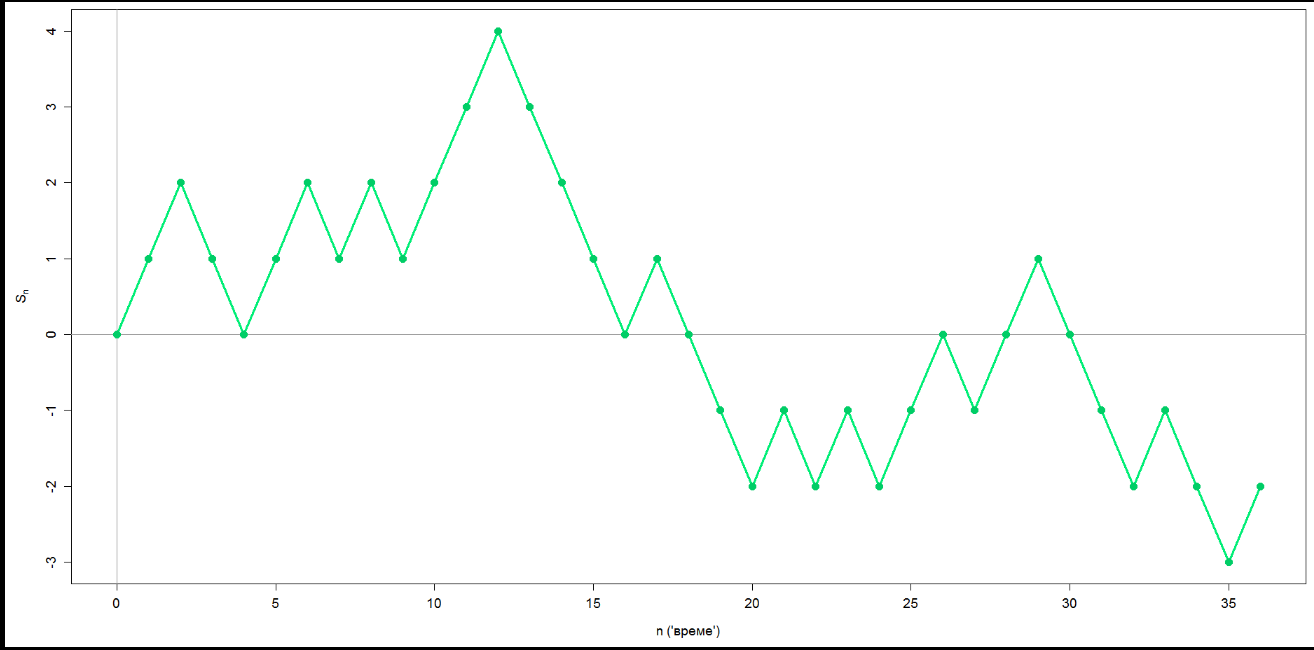
$\boldsymbol{d = 1}$	$\boldsymbol{d = 2}$	$\boldsymbol{d = 3}$
		

ЛГлаваш

Просто случајно лутање на правој
(трајекторије)

- $d = 1$, па сл. величина X_n има закон расподеле:
$$X_n\colon \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$
где је $p \in (0,1)$, $q := 1 - p$
Специјално, ако је $p = 0.5 = q$ реч је о симетричном простом случајном лутању на реалној правој (тј. прецизније у $\mathbb{Z}$).
- Трајекторија:

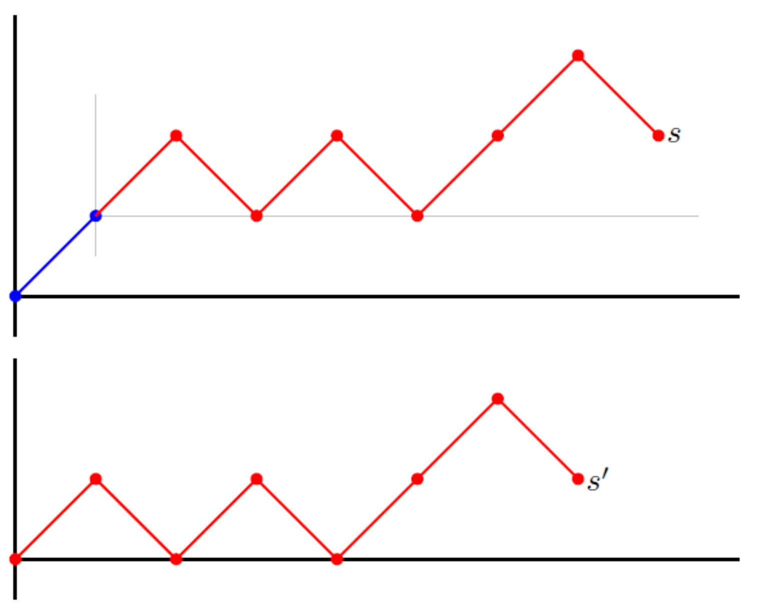
Кретање се описује низом
$$\big((n, S_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$$
декартовских координата тачака у равни.
Ове тачке повежу се изломљеном линијом, која онда представља реализацију, тј. трајекторију случајног лутања



ЛГлаваш

Просто случајно лутање на правој
(својства трајекторија)

- Случајно лутање је временски и просторно хомоген сл. низ, тј.
$$P\{S_{n+m} = k + l \mid S_m = l\} = P\{S_n = k \mid S_0 = 0\}.$$



- При услову да је познат положај честице у m-том кораку (тј. позната је реализација сл. величине S_m), будући положаји честице (након m-тог корака) не зависе од њених претходних положаја (у којима се она налазила пре m-тог корака). ***Марковско својство***

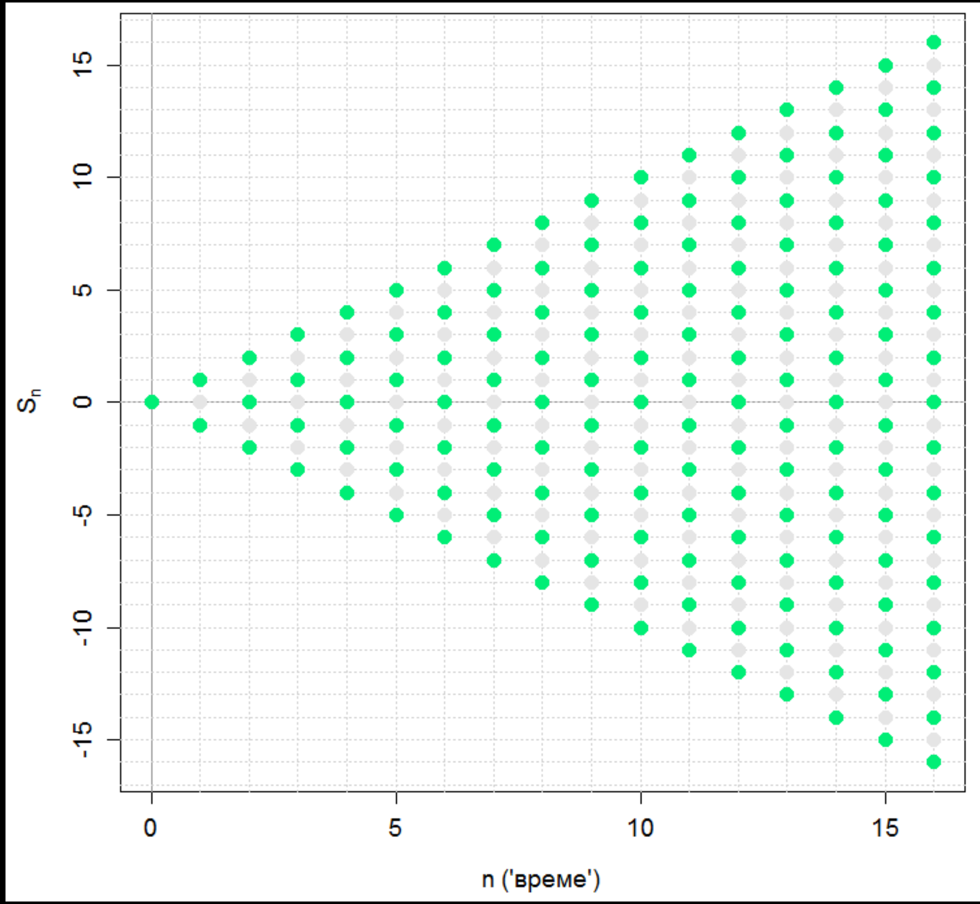
Просто случајно лутање на правој
(тачке достижне у n-том кораку)

- Скуп реализација случајног лутања је скуп вектора $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, код којих је $s_0 = 0$ и $s_{n+1} - s_n = \pm 1, n \in \mathbb{N}_0$.

- Каже се да је положај k достижан у n-том кораку ако постоји реализација таква да важи $s_n = k$.

- Нека су r и l, редом, број корака удесно $(s_{j+1} - s_j = 1)$, односно улево $(s_{j+1} - s_j = -1)$, које честица направи закључно са n-тим кораком.

- Критеријум достижности у n-том кораку: Постоје $r, l \in \mathbb{N}_0$ тако да важи:
$$r + l = n \text{ и } r - l = k.$$
Тада су тачне једнакости:
$$r = \frac{n+k}{2}, l = \frac{n-k}{2}.$$



☝ Приметити: n и k морају бити исте парности и мора важити $n \geq |k|$.

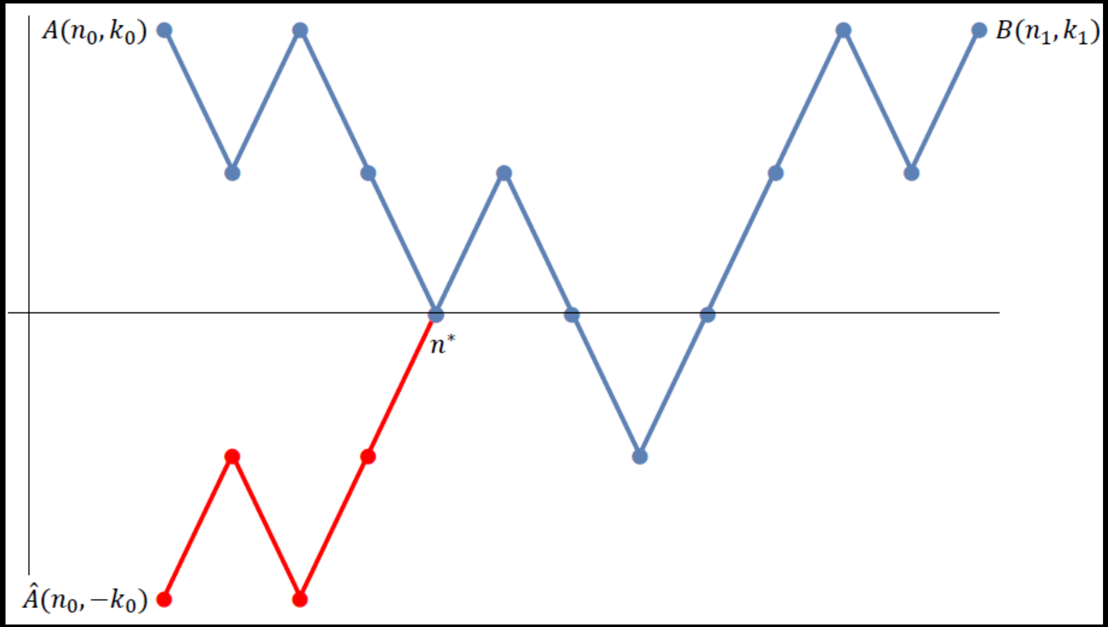
ЛГлаваш

Просто случајно лутање на правој
(пребројавање трајекторија, принцип рефлексије / симетрије)

- Нека је са $N_{n,k}$ означен број трајекторија које повезују тачке $(0,0)$ и (n,k). Тада важи:

$$N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}.$$

- Принцип рефлексије / симетрије:
  Број трајекторија које воде од тачке $A(n_0,k_0)$ до тачке $B(n_1,k_1)$ и имају заједничких тачака са временском осом једнак је броју свих трајекторија које воде од тачке $\hat{A}(n_0,-k_0)$ до тачке $B(n_1,k_1)$.



Просто случајно лутање на правој
(пребројавање трајекторија – 'Теорема гласачког листића', закон расподеле сл. величине S_n)

- Теорема гласачког листића:
  Ако је $k > 0$ онда постоји тачно
  $$\frac{k}{n} \cdot N_{n,k}$$
  трајекторија које повезују тачке $(0,0)$ и (n,k) и за које важи $s_m > 0$, за $m = \overline{1,n}$.
- Вероватноћа да се честица закључно са n-тим кораком креће делом трајекторије $(0, s_1, s_2, \dots, s_n)$ једнака је $p^r q^l$.
- Ако је положај k достижан у n-том кораку онда важи:
  $$P\{S_n = k\} = N_{n,k} \cdot p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}.$$
  Специјално, код симетричног случајног лутања:
  $$P\{S_n = k\} = N_{n,k} \cdot \frac{1}{2^n}.$$
- Пример примене теореме гласачког листића:
  Претпостави се да на гласању кандидат A освоји α гласова, а кандидат B освоји β гласова, где је $\alpha > \beta$. Вероватноћа да током бројања гласова (које се врши на случајан начин) увек води кандидат A једнака је $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

Просто случајно лутање на правој
(комбинаторно пребројавање трајекторија)

- **Т-ма.** Нека је $n \geq 1$. Тада важи:
$$P\{S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n \neq 0, S_n = k\} = \frac{|k|}{n} \cdot P\{S_n = k\},$$
а, као последица тога, и:
$$P\{S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n \neq 0\} = \frac{E|S_n|}{n}.$$
- Нека је $M_n \coloneqq \max\{S_j : j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}$. Очигледно је $M_n \geq 0$, а такође и $M_n \geq S_n$. Важи:
Т-ма. За $b \geq 1$ је:
$$P\{M_n \geq b, S_n = k\} = \begin{cases} P\{S_n = k\}, & \text{ако је } k \geq b \\ \left(\frac{p}{q}\right)^{b-k} \cdot P\{S_n = 2b - k\}, & \text{ако је } k < b \end{cases}.$$
Специјално, код симетричног случајног лутања:
$$P\{M_n \geq b\} = 2P\{S_n \geq b + 1\} + P\{S_n = b\}.$$

Симетрично просто случајно лутање на правој
(вероватноћа (првог) повратка у положај 0)

- Каже се да се n-том кораку догодио повратак у нулу ако је $S_n = 0$. Овај догађај има позитивну вероватноћу само онда када је n паран број $(n = 2m)$ и она је тада једнака:
$$u_{2m} \coloneqq P\{S_{2m} = 0\} = \binom{2m}{m} \cdot \frac{1}{2^{2m}}.$$
☝ Приметити: $u_{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$, при $m \to +\infty$.
- Каже се да се у тренутку $2m$ $(m \in \mathbb{N})$ догодио први повратак у нулу ако је $S_{2m} = 0$ и $S_2 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_{2m-2} \neq 0$. Нека је са v_{2m} означена вероватноћа овог догађаја.

- Т-ма. Вероватноћа догађаја да се честица закључно са $2m$-тим кораком неће вратити у нулу једнака је вероватноћи догађаја да ће у тренутку $2m$ бити у положају 0, тј:
$$P\{S_2 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_{2m} \neq 0\} = P\{S_{2m} = 0\} = u_{2m}.$$

- Вероватноће (u_{2m}) и (v_{2m}) повезују следеће једначине:
$$u_{2m} = v_2 u_{2m-2} + \dots + v_{2m} u_0,$$
$$v_{2m} = u_{2m-2} - u_{2m}.$$

Симетрично просто случајно лутање на правој

(вероватноћа (првог) повратка у положај 0 – наставак,
вероватноћа да се честица икада врати у положај 0, очекивано време до повратка)

- **Т-ма.** Вероватноћа догађаја да се честица први пут вратила у нулу у тренутку $2m$ једнака је:

$$v_{2m} = \frac{u_{2m}}{2m-1} = \frac{1}{2m-1}\binom{2m}{m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}.$$

☝ Приметити: $v_{2m} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}m^{3/2}}$, при $m \to +\infty$.

- Вероватноћа догађаја да се повратак у нулу не догоди касније од тренутка $2m$ једнака је:

$$\sum_{j=1}^{m} v_{2j} = 1 - u_{2m}.$$

- Ако честица лута бесконачно дуго онда је вероватноћа да ће се она икада вратити у нулу једнака:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} v_{2j} = \lim_{m\to\infty}(1 - u_{2m}) = 1.$$

- ☝ Очекивани број корака до првог повратка у положај 0 једнак је $+\infty$!!!

ЛГлаваш

Симетрично просто случајно лутање на правој
(Арксинусни закон)

- Нека је са T_{2m} означена сл. величина која представља тренутак када је честица последњи пут посетила нулу, закључно са $2m$-тим кораком, тј.
$$T_{2m} = \max\{2k : k \in \{0,1,2,\dots,m\} \land S_{2k} = 0\}.$$

- **Т-ма.** Расподела вероватноћа сл. величине T_{2m} дата је са:
$$\alpha_{2m}(2k) \coloneqq P\{T_{2m} = 2k\} = u_{2k} \cdot u_{2m-2k}.$$

- Ова расподела вероватноћа назива се дискретна арксинусна расподела реда m.
- За довољно велико k и $m-k$ важи апроксимација:
$$\alpha_{2m}(2k) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(m-k)}}.$$
- Према томе, за $x \in (0,1)$, при $m \to +\infty$, важи:
$$P\{T_{2m} \le 2mx\} = \sum_{k \le mx} \alpha_{2m}(2k) \approx \sum_{k \le mx} \frac{1}{\pi\sqrt{k(m-k)}} \sim \int_0^{mx} \frac{1}{\pi\sqrt{u(m-u)}}\,du = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

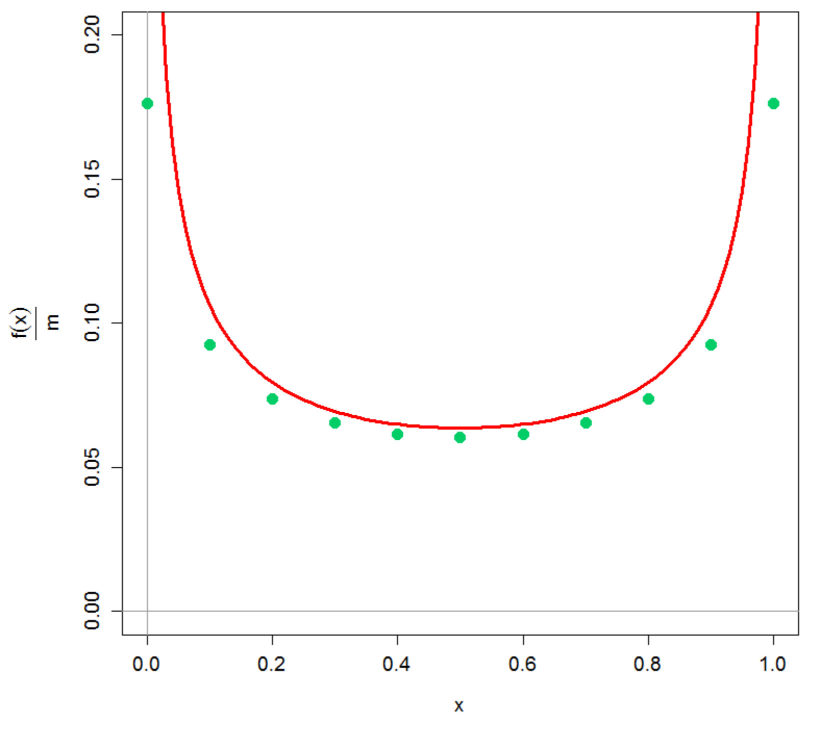
☝ Приметити: асимптотска расподела сл. величине $\frac{T_{2m}}{2m}$, при $m \to +\infty$, је расподела апсолутно непрекидног типа са густином $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, за $x \in (0,1)$.

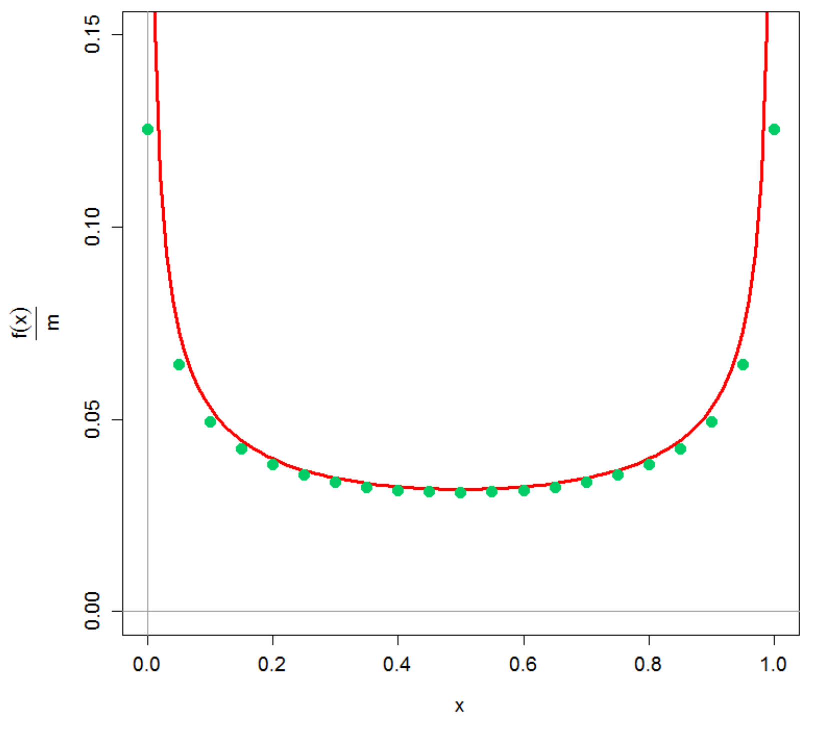
ЛГлаваш

Симетрично просто случајно лутање на правој
(апроксимација арксинусном расподелом)

За довољно велико m важи апроксимација:

$$\alpha_{2m}(2k) \approx \frac{1}{m} f\left(\frac{k}{m}\right).$$





На сликама су приказани графици функције $\frac{f(x)}{m}$ и тачке са координатама $\left(\frac{k}{m}, \alpha_{2m}(2k)\right)$, за $m = 10$ (лево), односно $m = 20$ (десно).

ЛГлаваш

Симетрично просто случајно лутање на правој

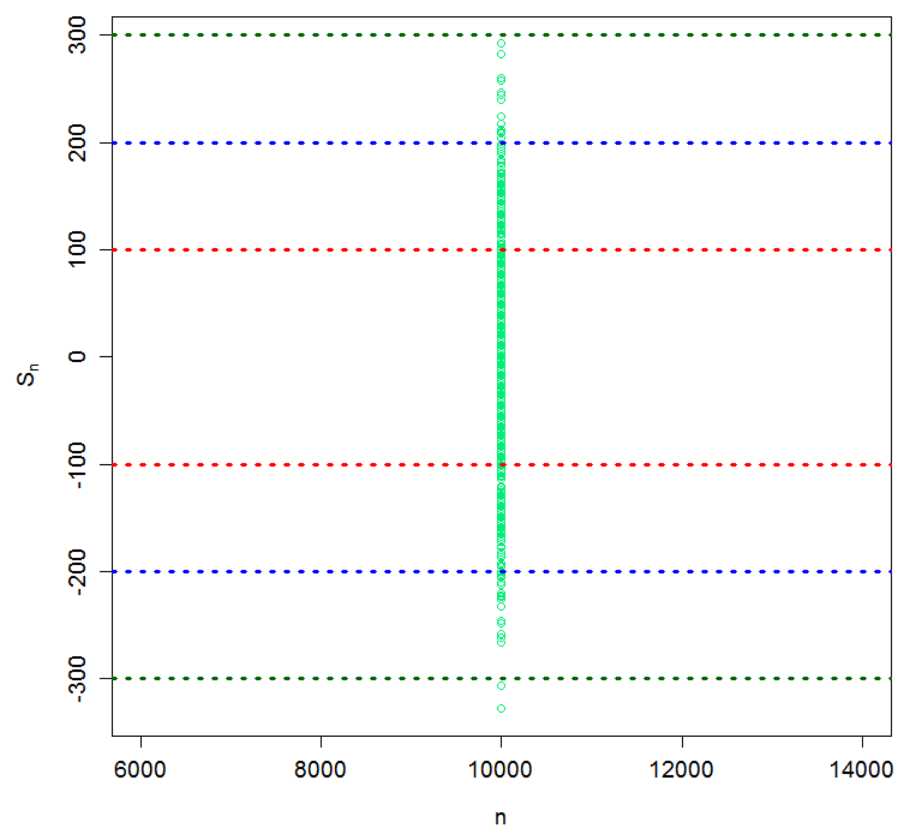
(граничне теореме)

На основу важења централне граничне т-ме за низ (X_n), за довољно велико n је:

$$P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \approx \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

На основу $i\sigma$-правила, $i = 1, 2, 3$, удео трајекторија које у 10000-том кораку пролазе кроз тачку из интервала:

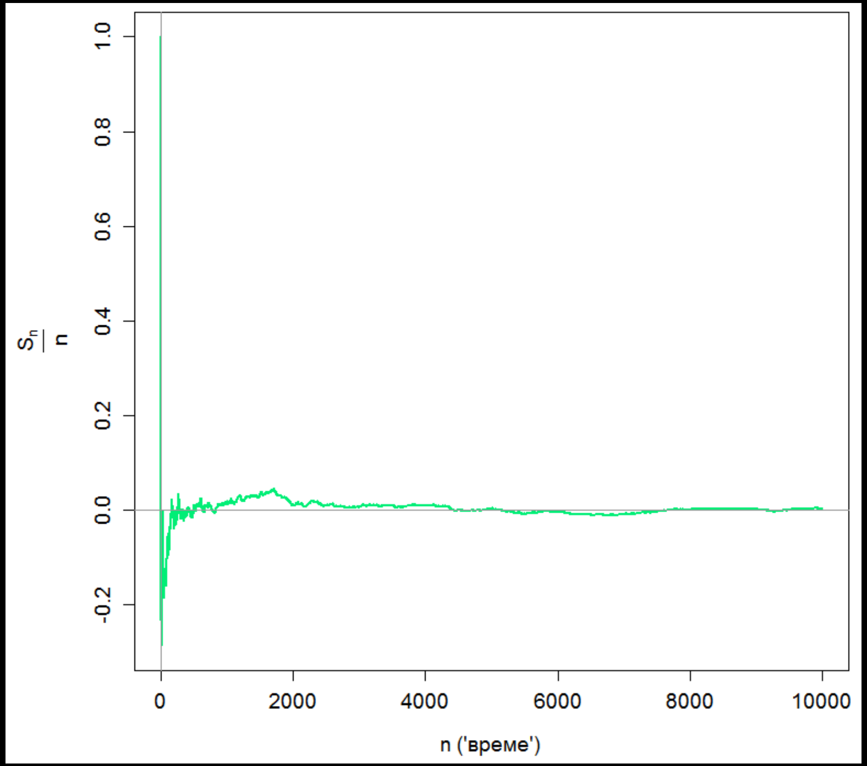
- $[-100, 100]$ износи $\approx 68\%$
- $[-200, 200]$ износи $\approx 95\%$
- $[-300, 300]$ износи $\approx 99.7\%$



Симетрично просто случајно лутање на правој
(граничне теореме – наставак)

На основу важења ***јаког*** закона великих бројева за низ (X_n), при $n \to +\infty$:

$$\frac{S_n}{n} \to 0, \qquad \text{са вероватноћом једнаком } 1.$$



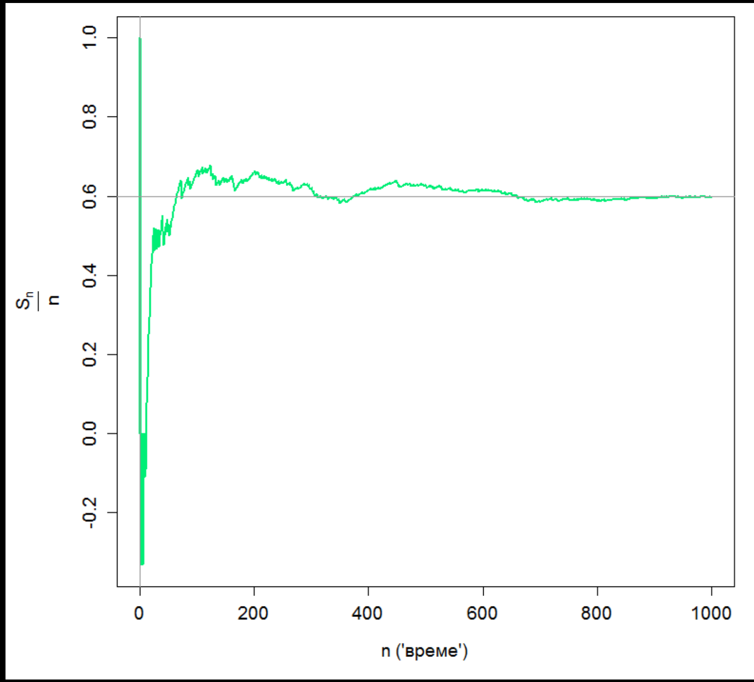
ЛГлаваш

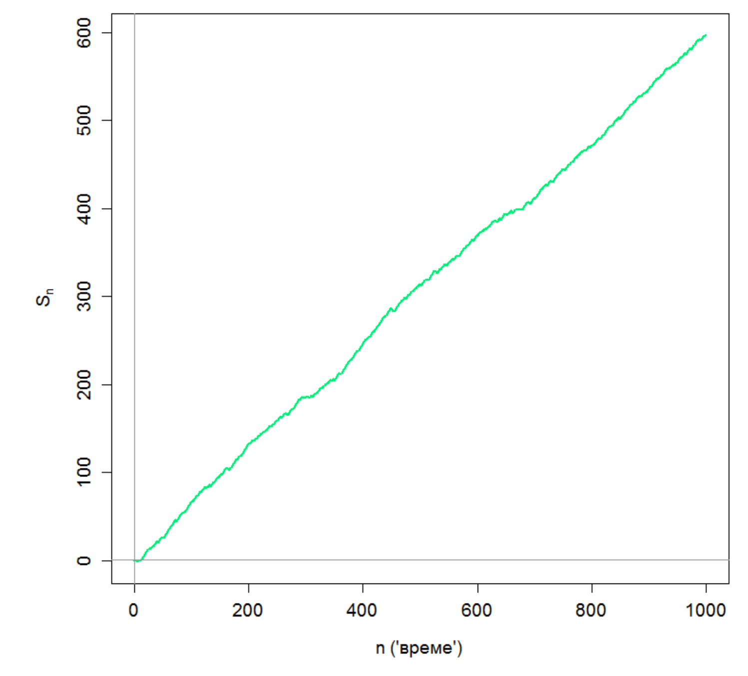
Несиметрично просто случајно лутање на правој

(гранична теорема)

Ако је $p > q$, тј. $p > 0.5$, онда је $EX_n > 0$, па на основу важења јаког закона великих бројева за низ (X_n), при $n \to +\infty$:

$$S_n \to +\infty, \qquad \text{са вероватноћом једнаком } 1.$$





На сликама су приказани графици симулираног дела трајекторије (до 1000-тог корака) за $p = 0.8$.

ЛГлаваш

(Не)симетрично просто случајно лутање на правој
(гранична теорема – наставак)

- Може се доказати (на основу јаког закона великих бројева) да за скоро сваку трајекторију постоји тренутак n након кога трајекторија не излази из угла одређеног следећим правама:

$$y_1 = (2p - 1 - \varepsilon) \cdot n \quad \text{и} \quad y_2 = (2p - 1 + \varepsilon) \cdot n,$$

  где је $\varepsilon > 0$ произвољно.
  Дакле, ако је $p > 0.5$ честица са вероватноћом 1 'бежи' у бесконачност у позитивном смеру, односно ако је $q > 0.5$ честица са вероватноћом 1 бежи у бесконачност у негативном смеру.

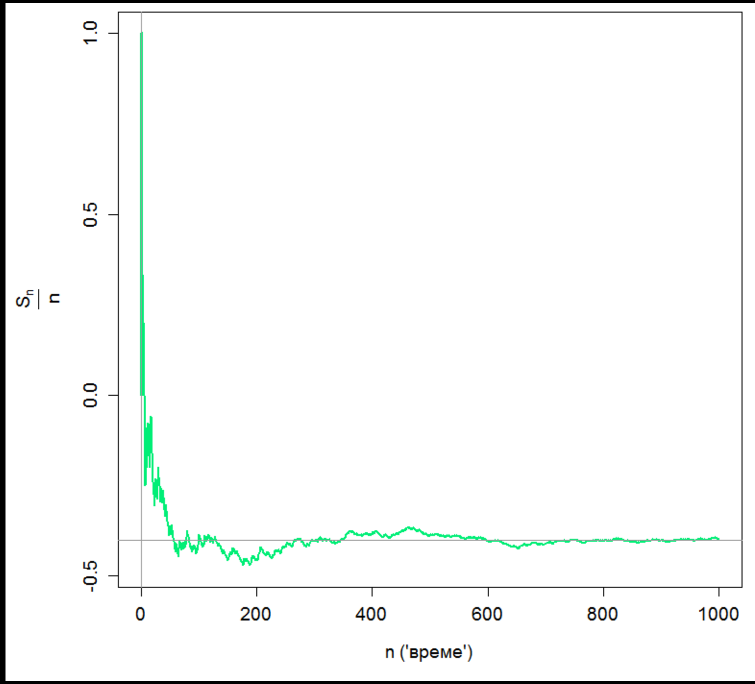
- **Т-ма.** Честица се враћа у положај 0 са вероватноћом 1 ако и само ако је
  $p = 0.5 = q$.

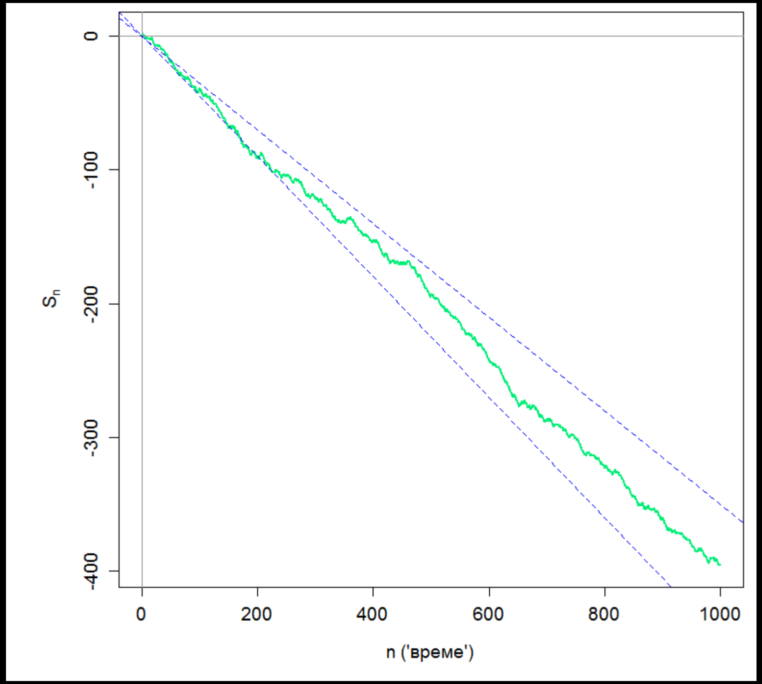
Несиметрично просто случајно лутање на правој

(гранична теорема – наставак)

Ако је $q > 0.5$, онда, при $n \to +\infty$:

$$S_n \to -\infty, \qquad \text{са вероватноћом једнаком 1.}$$





На сликама су приказани графици симулираног дела трајекторије (до 1000-тог корака) за $p = 0.3$.
Десно су уцртане и праве: $y_1 = -0.45n$ и $y_2 = -0.35n$.

ЛГлаваш

Просто случајно лутање на правој
(интерпретација – примери)

- Случајне величине X_n могу се, генерално гледано, схватити као модели за резултате појединачних независних експеримената са само два могућа исхода: -1 и $+1$.

- У том смислу, простим случајним лутањем на реалној правој може се моделирати игра са два учесника, која се састоји у низу независних партија, са вероватноћама победе играча једнаким p, односно q.

проблем пропасти играча ('Gambler's ruin problem')

ЛГлаваш

Случајно лутање
(примене у рачунарству)

- вероватносни алгоритми за SAT проблеме и њихова анализа
- оцењивање глобалних, структуралних својстава великих неусмерених графова
- претраживање и конструкција P2P мрежа