СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

Први домаћи задатак

1. Нека је $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ случајан процес са ортогоналним прираштајима, такав да је $X(0) = 0,\ EX(t) = 0,\ E|X(t) - X(s)|^2 = |t - s|,\ t, s \in \mathbb{R}$. Одредити корелациону функцију овог случајног процеса.

2. Нека је $\{\xi(t), t \geq 0\}$ Пуасонов случајни процес са интензитетом $\lambda > 0$. Испитати стационарност случајног процеса $\{Y(t), t \geq 0\}$, дефинисаног са:

$$Y(t) = \xi(at + 2) - \xi(t), t \geq 0,\ a > 0.$$

3. Нека је $\{W(t), t \geq 0\}$ стандардан Винеров процес (тј. Винеров процес са параметром $\sigma^2 = 1$). Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|W(n)| \leq |W(n + 1)|\}$.

Први колоквијум из случајних процеса ,
Математички факултет, април 2013.

1. а) Нека је $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом λ.
Одредити вероватноћу догађаја $\{2\xi(t) = \xi(2t) = 2$, за неко $t > 0\}$.
б) Одредити вероватноћу $P\{\xi(1) \geq 1|\xi(2) > 2\}$.

2. Нека је $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом λ.
Испитати стационарност процеса $\{X(t),\ t \geq 0\}$ где је $X(t) = \frac{\xi(t)}{t}$.

3.а) Нека је $\{W(t), t \geq 0\}$ стандардни Винеров процес. Израчунати вероватноћу догађаја $\{|W(2)| \leq |W(1)|\}$.
б) Израчунати вероватноћу $P\{\max\limits_{0 \leq t \leq a} W(t) > c, W(a) > 0\}$ где је $a > 0, c > 0$.

СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

Други домаћи задатак

1. Нека су $X_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, независне случајне величине са $\varepsilon(\lambda)$ расподелом, $\lambda > 0$. Случајан процес $\{Y(t), t \geq 0\}$ дефинисан је на следећи начин: $Y(t) = X_{[t]},\ t \geq 0$. Испитати да ли је процес $\{Y(t), t \geq 0\}$:

- стохастички непрекидан
- L_2 непрекидан.

2. Нека су $\xi_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, независне случајне величине са законом расподеле $\xi_n : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ и $\{N(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$. Случајан процес $\{X(t), t \geq 0\}$ дефинисан је на следећи начин: $X(t) = \xi_{N(t)},\ t \geq 0$.

- Испитати да ли процес $\{X(t), t \geq 0\}$ има марковско својство.
- Одредити $\lim\limits_{\lambda\to 0+} P\{X(b) = 1|X(a) = 1\}$ и $\lim\limits_{\lambda\to +\infty} P\{X(b) = 1|X(a) = 1\}$, $0 < a < b$.

3. Одредити спектралну густину процеса $\{V(n), n \in \mathbb{Z}\}$, који представља бели шум (енг. *white noise*).

II kolokvijum ,
Matematički fakultet, jul 2013. ,

1. Neka je $\{\xi(t), t \geq 0\}$ Puasonov proces sa intenzitetom λ, X slučajna veličina nezavisna od procesa $\{\xi(t), t \geq 0\}$, $P\{X = 0\} = p$, $P\{X = 1\} = q$, $p + q = 1$, $0 < p < 1$ i $Y(t) = (-1)^{X+\xi(t)}$, $t \geq 0$.
a) Odrediti $EY(t)$, $t \geq 0$. (4)
b) Za kakvo p je slučajni proces $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ stacionaran? (4)
c) U slučaju stacionarnosti slučajnog procesa $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ odrediti njegovu spektralnu gustinu. (5)

2.Neka je $\{X(n)\ n \in N_0\}$ homogen lanac Markova sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ i matricom verovatnoća prelaska za jedan korak

$$\Pi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Izračunati verovatnoću $P\{X(1) < 3, X(2) < 3, X(3) < 3 | X(0) = 2\}$ (4)
b) Ispitati da li je lanac $\{X(n),\ n \in N_0\}$ ergodičan. (4)
c) Dokazati da za $n \geq n_0$ važi nejednakost $p_{31}(n) > p_{22}(n)$. (5)

3a. Dve mašine servisira jedan tehničar. Dužina rada bez kvara svake od mašina ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu. Dužina trajanja popravke mašina ima $\mathcal{E}(\mu_1)$ raspodelu. Tehničar odmah vrši popravku mašine, ako se desi kvar i ako nije zauzet popravkom druge mašine, pri čemu kvar bilo koje mašine ne zavisi od toga da li se desio kvar neke druge mašine. U trenutku $t = 0$ su sve mašine ispravne. Ako je $X(t)$ broj ispravnih mašina u trenutku t, $t \geq 0$, odrediti $P\{X(t) = 1\}$. (4)

3b.Četiri mašine servisiraju 2 tehničara. Prvi tehničar servisira mashine A i B, a drugi mašine C i D. Dužina rada bez kvara svake od te četiri mašine ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu. Dužina trajanja popravke mašine A odnosno B ima $\mathcal{E}(\mu_1)$ raspodelu, a dužina trajanja popravke mashine C odnosno D ima $\mathcal{E}(\mu_2)$ raspodelu.Svaki od tehničara odmah vrši popravku mašine za koju je zadužen, ako se desi kvar i ako nije zauzet popravkom druge mašine, pri čemu kvar bilo koje mašine ne zavisi od toga da li se desio kvar neke druge mašine. U trenutku $t = 0$ su sve mašine ispravne. Ako je $X(t)$ broj ispravnih mašina u trenutku t, $t \geq 0$, odrediti granične verovatnoće $P_n = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = n\}$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. (6)

4. Izračunati $P\{W(2t) \geq |W(t)|, t > 0\}$, gde je $\{W(t), t > 0\}$ standardni Vinerov proces.