53. а) Аеродром са једном пистом представља M/M/1 систем.

$\lambda = 15$ авиона по сату

$\mu = 20$ авиона по сату

- искоришћеност писте: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} < 1$
- очекивани број авиона који чекају на слетање: $L_q = L - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \rho \cdot \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{3^2}{4^2}}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{4} = 2.25$ авиона
- очекивана дужина чекања авиона на слетање $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{9}{4}}{15} = \frac{3}{20} h = 9$ min
- вероватноћа да:
  - чекање траје дуже од 5 min: $P\{V_q > \frac{1}{12}\} = \frac{3}{4} e^{-20\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} e^{-\frac{5}{12}} \approx 0.49443$
  - чекање траје дуже од 10 min: $P\{V_q > \frac{1}{6}\} = \frac{3}{4} e^{-20\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} e^{-\frac{5}{6}} \approx 0.32595$
  - нема чекања: $P\{V_q = 0\} = \pi_0 = 1 - \rho = \frac{1}{4}$
- очекивани број слетања у двадесетоминутном временском интервалу: $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$ авиона

б) Сада две писте, тј. M/M/2 систем.

$\lambda = 15$ авиона по сату

$\mu = 20$ авиона по сату

- искоришћеност писте: $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{3}{8} < 1$
- очекивани број авиона који чекају на слетање: $L_q = \frac{(\frac{3}{8}\cdot 2)^3}{2\cdot 2!\,(1-\frac{3}{8})^2} \cdot \pi_0 = \frac{\frac{3^3}{4^3}}{4\cdot\frac{5^2}{8^2}} \cdot \frac{20}{44} = \frac{27}{220} \approx 0.12273$

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{2\cdot\frac{3}{8}}{1} + \frac{(2\cdot\frac{3}{8})^2}{2!}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{8}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{3^2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{20+15+9}{20}\right)^{-1} = \frac{20}{44}$$

- вероватноћа да нема чекања: $P\{V_q = 0\} = \pi_0 + \pi_1 = \pi_0 + \frac{3}{4}\pi_0 = \frac{7}{4}\pi_0 = \frac{7}{4}\cdot\frac{5}{11} = \frac{35}{44} \approx 0.79545$
- очекивани број слетања у двадесетоминутном временском интервалу: $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$ авиона

У * коришћено:

Burke-ова теорема

(Т) Нека је дат M/M/1, M/M/c or M/M/∞ систем са интензитетом долазака λ. Претпоставља се да је разматрани систем у равнотежном (стабилном) стању. Тада важи:

i) Процес одлазака је Пуасонов са интензитетом λ.

ii) У сваком временском тренутку број клијената у систему независан је од низа тренутака одлазака који претходе t.

$\boxed{54.}$ A: = послови у вези са платним прометом
B: = послови у вези са физичким лицима

$\lambda_A = 6$ клијената/h $\lambda_B = 12$ клијената/h
$\mu_A = 12$ клијената/h $\mu_B = 24$ клијената/h

а) у питању су два M/M/1 система опслуживања

	A	B
L_q	0.5	0.5
W_q	$\boxed{5\ min}$	$\boxed{2\ min\ 30\ s}$

$\rho_A = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} < 1$

$L^A = \frac{\rho}{1-\rho} = 1$

$L_q^A = L^A - \rho_A = 0.5$

$W_q^A = \frac{L_q^A}{\lambda_A} = \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{12} h$

$\rho_B = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} < 1$

$L^B = 1$

$L_q^B = 0.5$

$W_q^B = \frac{L_q^B}{\lambda_B} = \frac{\frac{1}{2}}{12} = \frac{1}{24}$

$\Rightarrow$ укупно у редовима: $\boxed{\text{просечно један човек}}$

б) у питању је један M/M/2 систем опслуживања

$\lambda = 18$ клијената/h

$\mu = 18$ клијената/h

$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{1}{2} < 1$

$\pi_0 = \left(1 + 1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$

$L_q = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{54} \approx \boxed{1\ min\ 7 s}$

Закључак: функционисање двоканалног система је много ефикасније од два двоканална (гледано у односу на једноканалне) је разлог узгред, ефикасности вишеканалних система (гледано у односу на једноканалне) је разлог зашто вишеканални системи, кад год је то могуће, користе један ред за чекање из кога се клијенти упућују на опслуживање $\triangle$

$\boxed{55.}$ три прозора
$\mu = 0.4$ кутија/min
$\lambda = 0.9$ кутија/min

а) у питању је M/M/3 систем.

$\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = \frac{\frac{9}{10}}{3 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} < 1$

$\pi_0 = \left(1 + \frac{9}{4} + \frac{9^2}{4^2 \cdot 2} + \frac{9^3}{4^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right)^{-1}$

$= \left(1 + \frac{9}{4} + \frac{81}{32} + \frac{9^2 \cdot 3}{4^3 \cdot 2} \cdot 4\right)^{-1}$

$= \left(\frac{32+72+81+243}{32}\right)^{-1} = \frac{32}{428} = \frac{8}{107}$

мере:

$L_q = \left(\frac{9}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{3 \cdot 3! (1-\frac{3}{4})^2} \cdot \frac{8}{107} = \frac{9^3}{\frac{4^4}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4^2}} \cdot \frac{8}{107} = \frac{729}{428} \approx 1.7$ кутија

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{729}{428} \cdot \frac{10}{9} = \frac{405}{214} \approx 1\ min\ 54 s$

$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{405}{214} + \frac{5}{2} = \frac{940}{214} \approx \boxed{4\ min\ 24 s}$

$L = \lambda W = \frac{9}{10} \cdot \frac{940}{214} = \frac{423}{107} \approx 3.95$ кутија

б) у питању су три M/M/1 система
За један од њих важи:

$\lambda' = \frac{\lambda}{3} = 0.3$

$\rho' = \frac{\lambda'}{\mu} = \frac{3}{4} < 1$

$L' = \frac{\rho'}{1-\rho'} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$

$L_q' = L' - \rho' = 2.25$

$W' = \frac{L'}{\lambda'} = \frac{3}{\frac{3}{10}} = \boxed{10\ min}$

$W_q' = \frac{L_q'}{\lambda'} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{10}} = 7\ min\ 30\ s$

на нивоу целог киоска:
- просечан број кутија: $3L' = 9$ кутија
- просечан број кутија који стоје у редовима за чекање: $3L_q' = 6.75$ кутија

$\triangle$

57. M|M|3|10

$\lambda = 20$ муштерија по сату

$\mu = 5$ муштерија по сату

$\rho = \frac{20}{3\cdot 5} = \frac{4}{3}$ Овде се не намеће услов $\rho < 1$ јер је капацитет система коначан, па свакако не може доћи до "експлозије".

а) Вероватноћа да особа која дође до радње буде услужена: $1 - \underbrace{\pi_{10}}_{\text{вероватноћа отказа}} = \frac{1448205}{1972493} \approx 0.734200324$

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}\left(\frac{20}{5}\right)^n + \sum_{n=3}^{10} \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^{n-3}}\left(\frac{20}{5}\right)^n\right)^{-1}$$

$$= \dots = \frac{6561}{1972493} \approx 0.003326248$$

$$\pi_{10} = 4^{10}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^7}\cdot\frac{6561}{1972493} = \frac{524288}{1972493}$$

б) $\bar{\lambda} = \lambda(1-\pi_{10}) \approx 14.684$ муштерија по сату

в) $W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{15021236}{28964100} \approx 0.5186157\,h \approx 31\,min\ 7\,s$

$$L = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \dots = \frac{15021236}{1972493} \approx 7.615356 \text{ људи}$$

Очекивани тренутак изласка особе X из радње је $9:31^{\underline{07}}$

г) $P\{V_q > 0\} = 1 - P\{V_q = 0\} = 1 - \sum_{n=0}^{2} \frac{\pi_n}{1-\pi_{10}}$ ← мора се узети у обзир чињеница да када је у систему n $(n<K)$ клијената вероватноћа да клијент који дође до система у њега и уђе износи $\frac{\pi_n}{1-\pi_{10}}$

= вероватноћа да муштерија која уђе у радњу чека у реду

Вероватноћа да особа која стигне до радње у њу уђе И чека на шишање износи

$$\sum_{j=3}^{9} \pi_j \approx 0.6909581$$

д) X - број празних столица за чекање

$$EX = \sum_{j=0}^{6} j\,\pi_{10-j} + 7(\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3)$$

$$= 7 - L_q$$

$$\approx 2.321446 \text{ столица}$$

ђ) M|M|3|10 $\rightsquigarrow$ M|M|m

$\frac{\lambda}{\mu\, m} < 1$

$\frac{20}{5\cdot m} < 1$

$\Rightarrow m \geq 5$

Потребно је да запосли бар још двојицу бербера. △