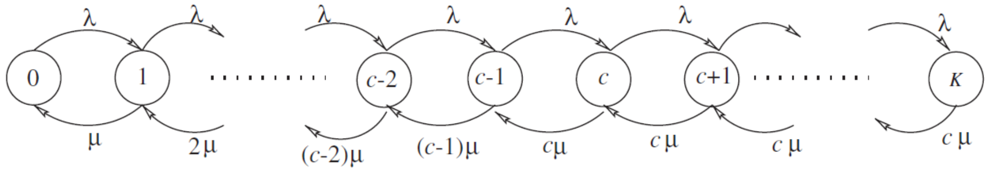
СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА 2015.

M|M|c|K Queue

У овом систему масовног опслуживања постоји укупно c сервера, капацитет целог система (број сервера + број места за чекање) је K. Претпоставља се да је популација бесконачног обима. Клијент који дође до система покуша да уђе у систем. Уколико је целокупан капацитет система попуњен улазак клијента у систем се одбија (тј. клијент добија отказ и „нестаје“).

Може се моделирати процесом рађања и умирања, са скупом стања $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, K\}$ и припадним графом:



Стационарна (равнотежна, стабилна) расподела $\boldsymbol{\pi} = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ дата је са:

$$\pi_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \pi_0 & , 0 \le n \le c \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{c^{n-c}} \cdot \pi_0 & , c \le n \le K \end{cases}$$

Из једначине нормирања добија се:

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{K} \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{c^{n-c}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right)^{-1}.$$

Уведе се ознака: $\rho \coloneqq \frac{\lambda}{c\mu}$.

Мере перформансе:

- Просечан број клијената у реду за чекање L_q

$$L_q = \sum_{n=c}^{K} (n-c)\pi_n = \pi_0 \cdot \frac{(c\rho)^c \cdot \rho}{c! \cdot (1-\rho)^2} (1 - \rho^{K-c+1} - (1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c}).$$

Ефективна стопа долазака (улазака у систем):

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - \pi_K).$$

π_K – вероватноћа одбијања/блокирања/отказа

- Просечан број клијената у систему L

$$L = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}.$$

- Просечна дужина временског периода чекања у реду W_q

  На основу Little-овог закона:

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}.$$

- Просечна дужина временског периода боравка у систему W

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

M|M|c|K|p Queue

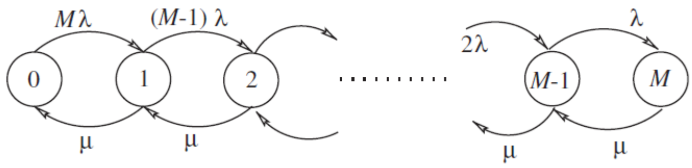
Разлика овог система масовног опслуживања у односу на претходно описани систем састоји се у томе што се овде претпоставља да је популација (из које потичу клијенти) коначног обима који износи p.

У ситуацији када је обим популације коначан, број клијената у систему опслуживања утиче на процес долазака у следећем смислу: што је већи број клијената у систему то је мањи број клијената ван система, па је, у складу са тим, нижа и стопа нових долазака. При томе, претпоставља се да сваки клијент ван система чека експоненцијално расподељену количину времена са параметром λ пре него што покуша да уђе у систем. Па, ако је у тренутку његовог покушаја уласка у систем у истом присутно мање од K клијената он улази у систем, док се, уколико је целокупан капацитет система попуњен, његов улазак одбија. Тај клијент покушаће поновни улазак у систем након што прође експоненцијално расподељена количина времена са параметром λ.

Ако је K ≥ p нема одбијања улазака клијената у систем, па се у том случају користи и нотација **M|M|c|∞|p** (овај модел често се назива и Engset delay model).

Специјално за **M|M|1|∞|M** систем

Припадни граф:



Стационарна (равнотежна, стабилна) расподела $\boldsymbol{\pi} = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ дата је са:

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{M!}{(M-n)!} \cdot \pi_0, 0 \le n \le M$$

Из једначине нормирања добија се:

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{M!}{(M-n)!}\right)^{-1}.$$

Мере перформансе:

- Просечан број клијената у систему L

$$L = \sum_{n=0}^{M} n\pi_n.$$

Ефективна стопа долазака:

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{M} \lambda(M-n)\pi_n = \cdots = \lambda(M-L)$$

- Просечан број клијената у реду за чекање L_q

$$L_q = L - \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = L - \lambda(M-L).$$

- Просечна дужина временског периода чекања у реду W_q

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}.$$

- Просечна дужина временског периода боравка у систему W

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$