ДОМАЋИ ЗАДАТАК 1 – СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА
новембар 2012.

1. E-mail-ови стижу на сервер у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda = 120$ e-mail-ова у једном минуту. Израчунати вероватноћу да у једноминутном временском интервалу 18 e-mail-ова стигне у току првих 10 секунди, а 9 e-mail-ова у току последњих 5 секунди.

2. Број посета некој web страници $X(t)$ у интервалу $(0, t]$, $t \geq 0$, може се представити као Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$ посета по једном сату. Израчунати вероватноћу да је било више посета страници у периоду од 8h до 9h него у периоду од 9h до 10h, ако се зна да је у периоду од 8h до 10h било укупно 10 посета.

3. Станодавац је $1.$ јануара дао оглас да издаје стан. Заинтересоване особе (потенцијални закупци) се јављају на оглас у складу са Пуасоновим процесом, са интензитетом $\lambda = 0.5$ особа по једном дану. Израчунати вероватноће догађаја:
а) до $15.$ јануара није се јавила ниједна заинтересована особа
б) до $20.$ јануара јавило се 6 потенцијалних закупаца, а до $31.$ јануара њих 10
в) до $31.$ јануара јавило се 10 заинтересованих особа, ако се зна да их се до $20.$ јануара јавило 6
г) до $20.$ јануара јавило се 6 потенцијалних закупаца, ако се зна да их се до $31.$ јануара јавило $10.$

4. Гајгеров бројач детектује сваку другу честицу, која стиже до бројача. Честице стижу до бројача у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Означи се са $Y(t)$ број честица детектованих у интервалу $(0, t]$, $t \geq 0$, при чему се претпоставља да је прва детектована честица, она која друга стигне до бројача.
а) Израчунати $P\{Y(t) = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
б) Израчунати $E(Y(t))$.
Нека је T дужина временског интервала између два узастопна детектована доласка честица до бројача.
в) Одредити густину расподеле случајне величине T.
г) Израчунати ET.

5. Коста, Лазар и Милан играју се добацивања лопте. Коста баца лопту Лазару у 30% случајева, а у 70% случајева Милану. Лазар баца лопту Кости у 60% случајева, а Милану у 40% случајева. Милан добацује лопту својим другарима са подједнаким вероватноћама. Оваква игра може се представити ланцем Маркова.
а) Одредити простор стања $\mathcal{S}$, матрицу вероватноћа прелаза и нацртати припадни граф.
б) Одредити матрицу вероватноћа прелаза за два корака.
в) Израчунати вероватноће догађаја:
- након трећег бацања лопта је код Милана, ако се зна да је након првог бацања била код Косте;
- након трећег бацања лопта је код Милана, ако се зна да је на почетку игре (пре него што је почело добацивање) лопта била код Косте.

г) Претпостави се да игра траје дужи временски период. Израчунати у колико бацања (процентуално) је лопта код Лазара.

6. Нека је ланац Маркова $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, са три могућа стања, задат наредним графом:

и почетном расподелом $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.5$. Израчунати вероватноће:

а) $P[X_1 = 0, X_2 = 2, X_3 = 1]$

б) $P[X_3 = 2 | X_1 = 2]$

в) $P[X_3 = 1 | X_1 = 0]$

7. У неком туристичком одмаралишту промене временских прилика од дана до дана (поједностављено гледано) могу се описати ланцем Маркова са три могућа стања:

E_1 : сунце; E_2 : облаци; E_3 : киша

Користећи статистичке податке везане за временске прилике у тој географској области добијена је следећа матрица вероватноћа прелаза:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.7 & 0.0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Туриста планира боравак у одмаралишту у периоду 30. децембар-1. јануар. Под претпоставком да има још доста времена до дочека Нове године, израчунати вероватноће:

а) да ће то бити три сунчана дана у низу;

б) да неће бити кише бар током прва два дана.

Рок за предају домаћих задатака је:

ДОМАЋИ ЗАДАТАК 2 – СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА
јануар 2013.

1. Фабрика располаже са две машине (A и B), које се кваре независно једна од друге са интензитетом од 2 квара по дану за сваку машину понаособ (подразумева се дан од 24h). У фабрици је запослен техничар који одржава машине. Он никада не поправља обе покварене машине истовремено. Период поправке машине је експоненцијално расподељен, са очекивањем од 4h. Дужине трајања поправке машина су међусобно независне и независне од стања друге машине. Машина A се сматра значајнијом у производном процесу него машина B, тако да када се поквари машина A, техничар одмах почиње да је поправља, чак и у ситуацији ако већ ради на поправци машине B. У поменутој ситуацији, поправка машине B се наставља тек када је поправка машине A завршена.
а) Описати систем одговарајућим ланцем Маркова.
б) Израчунати (асимптотски) проценат времена оперативности сваке од машина.
в) Израчунати проценат времена током кога је техничар заузет поправком машина.

2. Посматра се ланац Маркова са непрекидним временом; простор стања је $\mathcal{S} = \{0,1,2,3\}$ а инфинитезимална матрица Q дата је са:

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) Нацртати припадни граф (дијаграм стања) и одредити матрицу P.
б) Израчунати очекивано време уласка система из стања 0 у апсорбујуће стање.

3. Агенција за продају авионских карата је систем за чекање (претпоставља се неограниченог капацитета), са једним каналом за опслуживање (тј. једним службеником) и FIFO дисциплином опслуживања. Купци пристижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$, а дужине трајања опслуживања су независне и експоненцијално расподељене са параметром $\mu > 0$. Такође, постоји повратна веза (feedback): након завршетка опслуживања купац ће се, независно од прошлости, са фиксираном вероватноћом $0 < p < 1$ укључити на крај реда и поново чекати на опслуживање, или напустити систем са вероватноћом $q = 1 - p$. Купци ће, према томе, бити услужени више пута, пре него што коначно напусте систем.
а) Описати систем одговарајућим ланцем Маркова. Затим, знајући да се у систему налази тачно $j > 0$ купаца, одредити интензивност прелаза система у стање $j - 1$. Поставити диференцијалне једначине за вероватноће $P_k(t)$.
б) Решити једначине из дела **а)** у стационарном случају. Који су потребни и довољни услови, који морају бити задовољени за параметре λ, μ, p, да би систем имао нетривијално решење? Прокоментарисати.
в) Одредити средњи број купаца у ситему, гледано на дуже стазе.

4. Бродови стижу у луку у просеку на свака 4 сата. Просечно време потребно да се роба утовари на брод је 10 сати. Просечно трајање задржавања брода у луци, пре почетка утовара, мање је од 14 сати. Претпоставља се да су дужине периода између узастопних долазака бродова и дужине трајања утовара експоненцијално расподељене. Колики мора бити минималан број екипа задужених за утовар?

5. Банка намерава да у скорој будућности својим клијентима омогући услугу електронског банкарства. Процењено је да захтеви клијената, електронским путем, стижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Дужине трајања опслуживања су експоненцијално расподељене. Треба одабрати један од следећа три система за компјутерско услуживање клијената:

- систем са два сервера; захтеви клијената, у овој ситуацији, са вероватноћом по $\frac{1}{2}$, стижу на сваки од сервера, и чекају да буду обрађени; очекивана дужина трајања опслуживања клијента на сваком од сервера је по $\frac{1}{\mu}, \mu > 0$
- систем са два сервера; сви захтеви клијената, у овој ситуацији, се прикупљају по реду којим пристижу и преусмеравају на сервер, који је први слободан; очекивана дужина трајања опслуживања клијента на сваком од сервера је по $\frac{1}{\mu}, \mu > 0$
- систем са једним сервером, који ради два пута брже од сервера поменутих у претходне две ситуације

Одабрати оптималан систем од наведена три, поређењем њихових мера преформанси. Кратко прокоментарисати.

ЗА ВЕЖБУ:

6. Подаци се шаљу у облику пакета (packet), са експоненцијално расподељеном дужином и просечне дужине 1250 бајтова, компјутерском мрежом брзине 10Мбит/s. Претпоставља се да пакети стижу до система за слање у складу са Пуасоновим процесом, са интензитетом $\lambda > 0$. Ако је рутер који обавља слање слободан, пакет се одмах шаље, а ако није складишти се у бафер, редом којим је стигао у систем и опслужује по FIFO дисциплини.
а) Ако је на располагању бафер неограничене величине, за које вредности параметра λ је средње време које пакет проведе у систему за слање мање од 1ms.
б) Ако је бафер ограничене величине, колики треба да буде капацитет система да би губитак пакета (услед отказа) био не већи од 1% броја пакета.

Рок за предају домаћих задатака је:

СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА

Први колоквијум – 9. децембар 2012.

Сваки задатак носи по 5 поена. Све вероватноће које се израчунавају изразити као децималне бројеве, са највише 5 децимала.

1. Пацијенти стижу у зубарску амбуланту у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$ посета по минуту. Нека су I_1, I_2, I_3, три узастопна временска интервала, дужине по један минут.
а) Израчунати вероватноћу да ниједан пацијент није дошао у амбуланту у току ова три временска интервала.
б) Израчунати вероватноћу да је тачно један пацијент дошао у току једног од поменута три интервала, а да у преостала два интервала није било долазака пацијената у амбуланту.
в) Израчунати вероватноћу да је било су укупно три пацијента стигла у амбуланту у току ова три временска интервала, а да су тачно два доласка (од укупно три) била у току истог временског интервала.
г) Израчунати вредност λ за коју је вероватноћа, израчуната под **в)**, највећа.

2. Драган је запослен у брокерској кући. Његово радно време почиње у 8 сати ујутру, а завршава се у 5 сати поподне. Он добија понуде за куповину акција у складу са Пуасоновим процесом. Познато је да је да је у току (било ког) временског интервала дужине 20min очекивани број добијених понуда једнак 2. Прво изразити интензитет λ Пуасоновог процеса (у складу са којим Драган добија понуде) као број понуда по погодној јединици мерења времена (минут, сат или сл), а затим:
а) израчунати вероватноћу да је до 8.30 добио 5 понуда, ако се зна да је до 10 сати добио 10 понуда;
б) израчунати вероватноћу да је до 10 сати добио 10 понуда, ако се зна да је до 8.30 добио 5 понуда;
в) израчунати вероватноћу да између добијања седме и осме понуде прође више од пола сата;
г) ако се зна да је Драган до 11 сати добио 25 понуда за куповину акција, израчунати математичко очекивање и дисперзију броја понуда које ће добити у последња два и по сата свог радног времена.

3. Процес производње може се описати на следећи начин: сваки део који се производи започиње процес производње у сектору *I*. Познато је да од делова који се нађу у сектору *I*: њих 20% треба дорадити, тј. они остају у сектору *I*, 10% делова се баца, а 70% делова прелази у сектор *II*. Такође, зна се да од делова који се нађу у сектору *II*: њих 5% се враћа у сектор *I*, 10% делова остаје на доради у сектору *II*, 5% делова се баца, а 80% делова се шаље у продавницу.
а) Формулисати одговарајући ланац Маркова за овај модел, тј. одредити простор стања $\mathcal{S}$, матрицу вероватноћа прелаза и нацртати припадни граф.
б) Израчунати вероватноће догађаја:
- након трећег корака (тј. у тренутку 3) део је у сектору *II*, ако се зна да је након првог корака (тј. у тренутку 1) у сектору *I*
- након првог корака (тј. у тренутку 1) део је у сектору *II*, након другог корака (тј. у тренутку 2) део је опет у сектору *II*, а након трећег корака (тј. у тренутку 3) део је бачен
- након другог корака (тј. у тренутку 2) део је у продавници.

4. Бува скаче са темена троугла на суседно теме на следећи начин: ако је у темену i, онда са вероватноћом p_i скаче на теме у смеру казаљке на сату, односно са вероватноћом $q_i = 1 - p_i$ на теме у смеру супротном кретању казаљке на сату, $i = 1, 2, 3$. Ако је $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$:
а) одредити матрицу вероватноћа прелаза за један корак и матрицу вероватноћа прелаза за два корака;
б) израчунати колики део времена (процентуално), гледано на дуже стазе, бува проведе у сваком темену троугла;
в) нека је бува последњи пут скочила у теме 3, израчунати очекивани број скокова док не стигне у теме 1.

СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА

Други колоквијум – 18. јануар 2013.

Сваки задатак носи по 5 поена.

1. Канцеларија располаже са два фотокопир-апарата, о чијем одржавању се старају два механичара. Сваки апарат ради (до настанка квара) у временском интервалу експоненцијално расподељене дужине; очекивани период оперативности апарата је 5 дана. Покварену машину поправља тачно један од механичара и дужина трајања поправке је експоненцијално расподељена, са очекиваним периодом поправке од 4 дана.
а) Описати систем одговарајућим ланцем Маркова (рећи какав ланац Маркова је у питању и кратко образложити; одредити матрице Q и P).
б) Израчунати (асимптотски − гледано на дуже стазе) проценат времена током кога су оба механичара беспослена.
в) Израчунати очекивани број апарата, који су у функцији (тј. раде), гледано на дуже стазе.
г) Ако се зна да апарат у оперативном стању може да направи 100 фотокопија за један сат, колико фотокопија се, за један сат, може направити у целом систему, гледано на дуже стазе?

2. Посматра се ланац Маркова са непрекидним временом; простор стања је $\mathcal{S} = \{1,2,3,4\}$ а инфинитезимална матрица Q дата је са:
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ 3 & \_\_ & 2 & 1 \\ \_\_ & 1 & -4 & 1 \\ \_\_ & \_\_ & 5 & -5 \end{pmatrix}$$
а) Допунити елементе матрице Q, који недостају.
б) Нацртати припадни граф (дијаграм стања) и одредити матрицу P.
в) Да ли је описани ланац Маркова:
   - процес рађања и умирања
   - процес чистог размножавања
   - процес чистог умирања
   - ниједан од понуђених процеса

Одабрати тачно један од одговора и кратко образложити.
г) Израчунати очекивано време уласка система из стања 3 у апсорбујуће стање.

3. У рачунарском центру, при факултету, постоје два рачунара: A и B. Рачунар A користи се само за претраживање факултетске базе података, и нема излаз на интернет, док се рачунар B користи искључиво за претраживање интернета и нема приступ бази података. Претпоставља се да студент долази у центар са намером до користи тачно једну од те две услуге. Дужина временског интервала опслуживања студента, за сваки од рачунара, је експоненцијално расподељена, са очекиваним трајањем од по 3min. Студенти који имају потребу за претраживањем факултетске базе података пристижу у складу са Пуасоновим процесом, са очекиваним периодом између узастопних долазака од 5min, док студенти који имају потребу за претраживањем интернета пристижу у складу са Пуасоновим процесом, са интензитетом 18 студената по једном сату.
а) Ако се за сваки рачунар формира засебан ред за чекање, израчунати: очекивано време чекања у реду за сваки од рачунара; (асимптотски) проценат времена током кога нико не користи рачунар A, односно рачунар B.
б) Предложено је да се рад рачунарског центра реорганизује, тако што би се омогућило да сваки рачунар обавља оба посла: и претраживање факултетске базе података и претраживање интернета; фомира се један, јединствен ред за чекање. У овој ситуацији, израчунати: очекивано време чекања у реду; (асимптотски) проценат времена током кога су оба рачунара слободна; (асимптотски) проценат времена током кога су оба рачунара заузета.
Упоредити сценарије **а)** и **б)** у погледу ефикасности.
в) Ако одржавање сваког од рачунара кошта 25€ по сату, а задржавање сваког студента у центру кошта по 0.3€, који је сценарио (под **а)** или под **б)**) исплативији (у смислу када центар има мањи трошак)?

4. Бензинска станица налази се у улици са густим саобраћајем. Станица има само једно место за сипање горива, и капацитет да прими укупно четири аутомобила. Како чекање на улици није дозвољено, због оптерећености саобраћаја, аутомобили који затекну присутна четири аутомобила на пумпи, одмах возе даље (не задржавају се). Аутомобили пристижу у складу са Пуасоновим процесом, просечно 28 аутомобила по сату, а дужина трајања њиховог опслуживања је експоненцијално расподељена, са очекивањем од 3min.

а) Поставити диференцијалне једначине за вероватноће $P_k(t)$.
б) Решити једначине из дела **а)** у стационарном случају. Колико, процентуално, аутомобила не успе да наточи гориво и мора да се одвезе даље?
в) Ако би се додало још једно место за сипање горива за колико би се повећао проценат аутомобила који уђу у станицу?