1. (363. Глишић, Перуничић)

Процес чистог умирања: У области G у тренутку $t=0$ има m честица. Независно једна од друге, честице могу нестајати из области G, при чему свака ишчезава са вероватноћом $\mu\Delta t+o(\Delta t)$ у временском интервалу дужине Δt ($\mu>0$, Δt - довољно мало). Нове честице се не могу појавити.

а) Одредити систем ДЈ, које описују процес.

б) Нека је $X(t)$ бр. честица у области G у моменту $t>0$. Наћи $P_n(t)=P\{X(t)=n\}$, $0\le n\le m$.

в) Наћи $EX(t)$, $DX(t)$. Показати да $X(t)\xrightarrow{\text{с.к.}}0$, при $t\to+\infty$.

Решење:

$\{X(t),t\ge0\}$ - хомоген ланац Маркова са непрекидним временом

$S=\{0,1,2,\dots,m\}$ нове честице се не могу појавити

а) $P_0(t+h)=P_0(t)\cdot1^k+P_1(t)\cdot\mu h+o(h)$

$P_k(t+h)=P_k(t)\cdot(1-\mu h)^k+P_{k+1}(t)\cdot\binom{k+1}{1}\mu h(1-\mu h)^k+o(h)\quad k=\overline{1,m-1}$

$P_m(t+h)=P_m(t)\cdot(1-\mu h)^m+o(h)$

након сређивања једнакости, дељења сваке са h и пуштања $\lim\limits_{h\to0+}$ добија се систем ДЈ:

$$\boxed{\begin{aligned}&P_k'(t)=-k\mu P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t),\quad k=\overline{0,m-1}\\&P_m'(t)=-m\mu P_m(t)\end{aligned}}$$

б) Решава се систем ДЈ, тако што се крене од последње једначине, чије је решење:

$P_m(t)=C\cdot e^{-m\mu t}$

$C=const$ која се одређује из услова $P_m(0)=1$ (у области G у тренутку $t=0$ има m честица - почетна расподела)

$\Rightarrow C=1$

Дакле, $P_m(t)=e^{-m\mu t}$, $t\ge0$. Онда се сукцесивно решавају и остале једначине.

Занимљиво: $\boxed{X(t)\in\mathcal{B}(m,e^{-\mu t})}$

в) $EX(t)=me^{-\mu t}$; $DX(t)=me^{-\mu t}(1-e^{-\mu t})$ ▲

2. Рад три аутоматске машине, које раде независно једна од осталих, надгледају два техничара. Техничар А је задужен за прву и другу машину, а техничар В за трећу машину. Ако је нека од машина у тренутку t у исправном стању вероватноћа квара те машине у временском интервалу $(t,t+\Delta t)$ једнака је $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, $\Delta t\to0+$. Дужина трајања поправке било које од тих машина је сл. величина са $\mathcal{E}(\mu)$ расподелом. Одредити асимптотске вероватноће, при великим вредностима t, да је исправно i машина, $i=\overline{0,3}$. (II колоквијум, 2013, задатак 3.б)

Решење:

1.1 у фајлу "Додатак задацима са вежби" ▲

СТОХАСТИЧКА НЕПРЕКИДНОСТ /НЕПРЕКИДНОСТ У ВЕРОВАТНОЋИ

Случајан процес $\{X(t),t\in T\}$ је стохастички непрекидан у тачки $t_0\in T$ ако

$X(t)\xrightarrow{P}X(t_0)$, при $t\to t_0$

тј. за $\forall\varepsilon>0$

$\lim\limits_{t\to t_0}P\{|X(t)-X(t_0)|>\varepsilon\}=0.$

Процес је стохастички непрекидан на сегменту $[a,b]$ ако је стохастички непрекидан у свакој тачки тог сегмента.

3. Нека је U сл. величина, униформно расподељена на $[0,1]$ и $X(t)=0$ за $t\in[0,U]$, $X(t)=\dfrac{1}{t-U}$ за $t\in(U,1]$.

Доказати да је сл. процес $\{X(t),t\in[0,1]\}$ стохастички непрекидан.

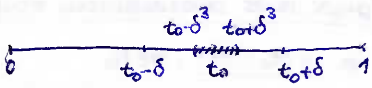
Решење.

Дакле, треба показати да је дати сл. процес непрекидан у свакој тачки $t_0\in[0,1]$.

(i) $0<t_0<1$

Нека је $\varepsilon>0$ (прецизније $\varepsilon\in(0,1)$) дато.

Нека је $\delta>0$ т.д. $0<t_0-\delta<t_0<t_0+\delta<1$ и $t_0-\delta^3<t<t_0+\delta^3$.



(Приметити, тада је свакако $\delta<\frac{1}{2}$).

- Ако је $U(\omega)\in[0,1]$ т.д. $U(\omega)\ge t_0+\delta$ тада $t\in[0,U(\omega)]$

$\Rightarrow X(t,\omega)=X(t_0,\omega)=0$

тј. $|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|=0$

- Ако је $U(\omega)\in[0,1]$ тд. $U(\omega)\le t_0-\delta$ тада $t\in(U(\omega),1]$

$$\Rightarrow X(t,\omega)=\frac{1}{t-U(\omega)},\quad X(t_0,\omega)=\frac{1}{t_0-U(\omega)}$$

$$|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)| = \Big|\underbrace{\frac{1}{t-U(\omega)}}_{t-U(\omega)\ge\delta-\delta^3} - \underbrace{\frac{1}{t_0-U(\omega)}}_{t_0-U(\omega)\ge\delta}\Big| = \frac{|t-t_0|}{|t-U(\omega)||t_0-U(\omega)|} < \frac{\delta^3}{\delta^2(1-\delta^2)} = \frac{\delta}{\underbrace{(1-\delta^2)}_{>\frac{3}{4}}} < 2\delta$$

Дакле, ако је $|t-t_0|<\delta^3$ (а тада је аутоматски и $|t-t_0|<\delta$) и $U(\omega)\ge t_0+\delta$ или $U(\omega)\le t_0-\delta$ онда важи $|X(t)-X(t_0)|<\varepsilon$, при чему се узме нпр. $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

Значи, ако је $|t-t_0|<\frac{\varepsilon^3}{8}$ онда

$$P\{|X(t)-X(t_0)|<\varepsilon\} \ge P\{U\ge t_0+\delta\}+P\{U\le t_0-\delta\} \overset{U\in\mathcal{U}[0,1]}{=} 1-\varepsilon$$

тј. преласком на супротан догађај

$$P\{|X(t)-X(t_0)|\ge\varepsilon\}<\varepsilon$$

па, по деф, $X(t)\xrightarrow{P}X(t_0)$, при $t\to t_0$.

(ii) $t_0=0$
Аналогно, само што се разматра десна гранична вредност, при $t\to 0+$.

(iii) $t_0=1$
Аналогно, само што се разматра лева гранична вредност, при $t\to 1-$.

НЕПРЕКИДНОСТ У СРЕДЊЕ-КВАДРАТНОМ СМИСЛУ / L^2-НЕПРЕКИДНОСТ

L^2-процес $\{X(t),t\in T\}$ је непрекидан у средње-квадратном смислу у тачки $t_0\in T$ ако

$$X(t)\xrightarrow{с.к.}X(t_0),\ \text{при } t\to t_0,$$

тј. $E|X(t)-X(t_0)|^2\to 0$, при $t\to t_0$.

(Т) Нека је $\{X(t),t\in T\}$ L^2-процес. Овај процес је L^2-непрекидан у тачки $t_0\in T$ $\boxed{\text{акко}}$ је

(1) средња вредност процеса $m(t)$ непрекидна у тачки t_0

(2) корелациона ф-ја $K(s,t)$ непрекидна у тачки (t_0,t_0).

$\rightsquigarrow$ (Т) за слабо стационарне процесе !

$\boxed{4.}$ Нека су X_n, $n\in\mathbb{N}_0$, независне сл. величине са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом. Дефинише се сл. процес $Y=\{Y(t),t\ge 0\}$ на следећи начин: $Y(t)=X_{[t]}$, $t\ge 0$. Испитати да ли је процес Y

а) стохастички непрекидан

б) L^2-непрекидан.

Решење:

а) Нека је $\varepsilon>0$ фиксирано.
Нека је $t_0=n$, $n\in\mathbb{N}$.

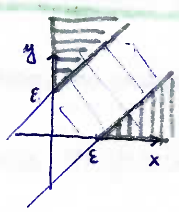
• нека је $n\le t<n+1$

$$P\{|Y(t)-Y(t_0)|\ge\varepsilon\}=P\{|X_n-X_n|\ge\varepsilon\}=0$$
$[t]=[t_0]=n$

$\Rightarrow$ Процес је стохастички непрекидан здесна у свим тачкама $t_0\in\mathbb{N}$.
Аналогно, процес је стохастички непрекидан у тачки $t_0=0$.

• нека је је $n-1\le t<n$

$$P\{|Y(t)-Y(t_0)|\ge\varepsilon\}=P\{|X_{n-1}-X_n|\ge\varepsilon\}$$



$$\underset{\text{нез}}{=}\iint_D \lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda y}\,dx\,dy>0$$

$D:(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$|x-y|\ge\varepsilon$

$\Rightarrow$ Процес није стохастички непрекидан слева ни у једној тачки $t_0\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Процес није стохастички непрекидан у тачкама $t_0\in\mathbb{N}$.

Нека је $n<t_0<n+1$, $n\in\mathbb{N}_0$.
Због $t\to t_0$ може се сматрати $n<t<n+1$

$$P\{|Y(t)-Y(t_0)|\ge\varepsilon\}=P\{|X_n-X_n|\ge\varepsilon\}=0$$

$\Rightarrow$ Процес је стохастички непрекидан у тачки t_0.

б) У тачкама $t_0 \in \mathbb{N}$ процес није L^2-непрекидан.
У тачки $t_0 = 0$ и за $t \in (0,1)$
$$E|Y(t)-Y(t_0)|^2 = E|X_0 - X_0|^2 = 0$$
па је процес L^2-непрекидан.
У тачки $n < t_0 < n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, аналогно, процес је L^2-непрекидан.

ИЗВОД СЛУЧАЈНОГ ПРОЦЕСА

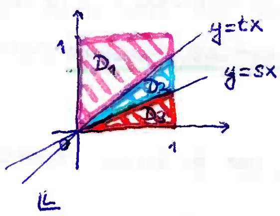
Нека је $\{X(t), t\in T\}$ сл. процес са непрекидним параметарским скупом T. Узме се у разматрање количник прираштаја датог процеса и његовог аргумента t, тј. количник
$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h}.$$
Ако тај количник има граничну вредност у смислу стохастичке конвергенције, тј. конвергенције у вероватноћи, при $h\to 0$, онда се каже да је процес стохастички диференцијабилан / P-диференцијабилан у тачки t, а гранична вредност $X'(t)$ је стохастички извод / P-извод у тачки t.
$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h} \xrightarrow{P} X'(t), \text{ при } h\to 0$$
Сл. процес $\{X(t), t\in T\}$ има средње-квадратни извод ξ у тачки t, тј. он је L^2-диференцијабилан у тачки t ако
$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h} \xrightarrow{с.к.} \xi, \text{ при } h\to 0,$$
тј. ако
$$E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h} - \xi\right|^2 \to 0, \text{ при } h\to 0.$$
$$\xi := X'(t)$$

- Ако је L^2-процес са средњом вредношћу 0 и корелационом ф-јом $K(s,t)$ L^2-диференцијабилан у тачки $t_0\in T$, тада постоји $\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial t}$ у тачки (t_0,t_0).
- Ако је L^2-процес $\{X(t), t\in T\}$ L^2-диференцијабилан на T онда је $\frac{\partial^2 K(s,t)}{\partial s\partial t}$ корелациона ф-ја процеса $\{X'(t), t\in T\}$.

5. Нека су X и Y независне сл. величине са $U[0,1]$ расподелом и нека је $Z(t) = \min\{tX, Y\}$.
а) Одредити корелациону ф-ју процеса $\{Z(t), t\in[0,1]\}$.
б) Испитати да ли је процес $\{Z(t), t\in[0,1]\}$ L^2-непрекидан.
в) — " — L^2-диференцијабилан.

Решење:

$$\min\{sx,y\} = \begin{cases} sx, & sx<y \\ y, & sx\ge y\end{cases}$$
$$\min\{tx,y\} = \begin{cases} tx, & tx<y \\ y, & tx\ge y\end{cases}$$
$$\min\{sx,y\}\cdot\min\{tx,y\} = \begin{cases} stx^2, & tx<y \\ sxy, & sx<y\le tx \\ y^2, & sx\ge y\end{cases}$$



а) Нека је овде $0\le s\le t\le 1$.
$$K(s,t) = E(Z(s)Z(t)) - EZ(s)\cdot EZ(t) = \circledast$$
$$E(Z(s)Z(t)) = E(\min\{sX,Y\}\cdot\min\{tX,Y\})$$
$$= \iint_{[0,1]^2} \min\{sx,y\}\cdot\min\{tx,y\}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1\int_{tx}^1 stx^2\,dy\,dx + \int_0^1\int_{sx}^{tx} sxy\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^{sx} y^2\,dy\,dx$$
$$= \ldots = \frac{st}{3} - \frac{st^2}{8} - \frac{s^3}{24}$$
$$EZ(s) = \int_0^1\int_{sx}^1 sx\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^{sx} y\,dy\,dx = \ldots = \frac{s}{2} - \frac{s^2}{6}$$
Слично $EZ(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6}$.
$$\Rightarrow \circledast = \frac{st}{3} - \frac{st^2}{8} - \frac{s^3}{24} - \frac{st}{4} + \frac{st^2}{12} + \frac{s^2t}{12} - \frac{s^2t^2}{36} = \frac{st}{12} - \frac{st^2}{24} + \frac{s^2t}{12} - \frac{s^2t^2}{36} - \frac{s^3}{24}, \quad 0\le s\le t\le 1$$
Аналогно,
$$K(s,t) = \frac{st}{12} - \frac{s^2t}{24} + \frac{st^2}{12} - \frac{s^2t^2}{36} - \frac{t^3}{24}, \quad 0\le t\le s\le 1$$

б) $m(t) = EZ(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6}$ што је непрекидна ф-ја промењиве t на $[0,1]$

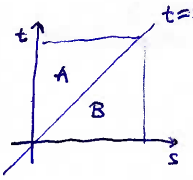
$K(t,t) = \frac{t^2}{12} - \frac{t^3}{24} + \frac{t^3}{12} - \frac{t^4}{36} - \frac{t^3}{24} = \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{36}$ што је непрекидна ф-ја промењиве t на $[0,1]$

(Т) $\Rightarrow$ Процес $\{Z(t), t\in[0,1]\}$ јесте L^2-непрекидан.

в) (Т) Да би L^2-процес $\{X(t), t\in T\}$ имао L^2-извод у тачки $t_0 \in T$ потребно је и довољно да постоји извод $m'(t)$ ф-је средње вредности у тачки t_0 и уопштени други извод $\frac{\partial^2 K(s,t)}{\partial s \partial t}$ корелационе ф-је у тачки (t_0, t_0).

$\leadsto$ (Т) за слабо стационарне процесе!

- $m'(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$ што је непрекидна ф-ја промењиве t на $[0,1]$



- у области A: $K(s,t) = \frac{st}{12} - \frac{st^2}{24} + \frac{s^2t}{12} - \frac{s^2t^2}{36} - \frac{s^3}{24}$

$K_s'(s,t) = \frac{t}{12} - \frac{t^2}{24} + \frac{st}{6} - \frac{st^2}{18} - \frac{s^2}{8}$

у области B: $K(s,t) = \frac{st}{12} - \frac{s^2t}{24} + \frac{st^2}{12} - \frac{s^2t^2}{36} - \frac{t^3}{24}$

$K_s'(s,t) = \frac{t}{12} - \frac{st}{12} + \frac{t^2}{12} - \frac{st^2}{18}$

$\Rightarrow$ ф-ја $K(s,t)$ има парцијални извод по s у свим тачкама скупа $[0,1]^2$. Овај извод је непрекидан у дијагоналним тачкама (и износи $\frac{s}{12} - \frac{s^3}{18}$)
Такође, постоји $K_t'(s,t)$, $K_{st}''(s,t)$, $K_{ts}''(s,t)$ и ови изводи су непрекидни у дијагоналним тачкама.

$\Rightarrow \exists$ уопштени други извод корелационе ф-је у дијагоналним тачкама

(Т) $\Rightarrow$ Процес $\{Z(t), t\in[0,1]\}$ јесте L^2-диференцијабилан. ▲

- **Теорема Herglotz-а**

Комплексно-вредносна ф-ја $K: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ је корелациона ф-ја стационарног L^2-процеса акко постоји коначна мера μ на $\mathcal{B}[-\pi,\pi]$ тдј.

$$K(n) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{inu}\, d\mu(u), \text{ за } n\in\mathbb{Z}.$$

- **Теорема Bochner-а**

Комплексно-вредносна ф-ја $K: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, која је непрекидна у нули, је корелациона ф-ја стационарног L^2-процеса акко постоји коначна мера μ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ тдј.

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu}\, d\mu(u), \text{ за } t\in\mathbb{R}.$$

μ - спектрална мера процеса

$F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(-\infty) = 0$, $F(\beta) - F(\alpha) = \mu[\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in S$ (где је $S = [-\pi,\pi]$, односно $S = \mathbb{R}$) је спектрална ф-ја расподеле

$f(\lambda) = F'(\lambda)$ - спектрална густина (постоји ако је μ апсолутно непрекидна у односу на лебегову меру)

$\boxed{6.}$ Ако је $K(n) = a^{|n|}$, где је $|a|<1$, испитати да ли је $K(n)$ корелациона ф-ја неког стационарног низа.

$\boxed{7.}$ Испитати да ли је ф-ја $K(n) = (1+|n|)a^{|n|}$, $n\in\mathbb{Z}$, корелациона ф-ја неког стационарног низа ако је

а) $a \in (\frac{1}{2}, 1)$

б) $a \in (0, \frac{1}{3})$

Ако $K(n)$ јесте корелациона ф-ја одредити спектралну густину.

(Т) стационаран сл. процес је m пута L^2-диференцијабилан акко $\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2m} f(\lambda)\, d\lambda$ конвергира

$\boxed{8.}$ Испитати да ли је стационаран сл. процес $\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$ са ф-јом средње вредности 0 и корелационом ф-јом $K(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|}$, $c>0$, $\alpha>0$, $\tau\in\mathbb{R}$, диференцијабилан у средње-квадратном.
Одредити $E|X(t)|^2$.