7. Решење:

а) $a\in(\frac{1}{2},1)$

Корелациона ф-ја стационарног случајног процеса има својства:

1) $K(0)\geq 0$
($K(0)=0$ акко је $X(t)=const\ c$, за $\forall t\in T$)

2) $K(-\tau)=\overline{K(\tau)}$

3) $|K(\tau)|\leq K(0)$

4) ненегативна дефинитност

Овде је $K(0)=1$, а нпр. $K(1)=2a>1$ за вредности a из датог интервала.

$\Rightarrow$ не важи особина 3)

$\Rightarrow$ ф-ја K није корелациона ф-ја

б) $a\in(0,\frac{1}{3})$

Лако се провери: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|K(n)|<+\infty$

$$\Rightarrow f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}K(n)e^{-in\lambda}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1+|n|)a^{|n|}e^{-in\lambda}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1+|n|)a^{|n|}(\cos(n\lambda)-i\sin(n\lambda))\right)$$

f је инверзна Фуријеова трансф. од $K(n)$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1+|n|)a^{|n|}\cos(n\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left(2\sum_{n=1}^{+\infty}(1+n)a^{n}\cos(n\lambda)+1\right)$$

$$\cos(n\lambda)=\frac{e^{in\lambda}+e^{-in\lambda}}{2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}na^{n-1}(e^{i\lambda})^{n-1}+\sum_{n=2}^{+\infty}na^{n-1}(e^{-i\lambda})^{n-1}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(1-ae^{i\lambda})^2}-1+\frac{1}{(1-ae^{-i\lambda})^2}-\cancel{1}+\cancel{1}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-2ae^{-i\lambda}+a^2e^{-2i\lambda}+1-2ae^{i\lambda}+a^2e^{2i\lambda}}{(1-ae^{i\lambda})^2(1-ae^{-i\lambda})^2}-1\right)$$

$|ae^{i\lambda}|<1$
$|ae^{-i\lambda}|<1$
+ користи се:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad \text{за } |x|<1$$

након сређивања

$$=\frac{1-4a^2-a^4+4a^3\cos\lambda}{(1-ae^{i\lambda})^2(1-ae^{-i\lambda})^2}=\frac{1-4a^2-a^4+4a^3\cos\lambda}{(1-2a\cos\lambda+a^2)^2},\quad -\pi\leq\lambda\leq\pi$$

Остаје још да се провери да ли је за $a\in(0,\frac{1}{3})$ ф-ја $f(\lambda)$ ненегативна за свако λ.

$$f(\lambda)\geq\frac{1-\frac{4}{9}-\frac{1}{81}-\frac{4}{27}}{(1-2a\cos\lambda+a^2)^2}=\frac{32}{81(1-2a\cos\lambda+a^2)^2}\geq 0$$

$$\Rightarrow K(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}f(\lambda)\,d\lambda$$

На основу теореме Herglotz-а K јесте корелациона ф-ја. △

8. Решење:

$E|X(t)|^2=DX(t)=K(0)=C$

Лако се провери: $\int_{-\infty}^{+\infty}|K(\tau)|\,d\tau<+\infty$.

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(\tau)e^{-i\lambda\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-\alpha|\tau|}e^{-i\lambda\tau}d\tau=\frac{C}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{\tau(\alpha-i\lambda)}d\tau+\int_{0}^{+\infty}e^{-\tau(\alpha+i\lambda)}d\tau\right)$$

$$=\dots=\frac{C\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}\geq 0\quad \text{за } \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2f(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C\alpha\lambda^2}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}d\lambda=\frac{C\cancel{\alpha}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2}{\alpha^2(1+(\frac{\lambda}{\alpha})^2)}d\lambda=\frac{2C}{\pi\alpha}\int_{0}^{+\infty}\frac{\lambda^2}{1+(\frac{\lambda}{\alpha})^2}d\lambda=\left\{\begin{array}{l}\frac{\lambda}{\alpha}=u\\ d\lambda=\alpha\,du\end{array}\right\}=\frac{2C}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha^2u^2}{1+u^2}du$$

$$=\frac{2C\alpha^2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^2}du$$

Последњи интеграл је дивергентан.

(Т) $\Rightarrow$ Процес није (ниједанпут) диференцијабилан у средње квадратном смислу. △