МАКСИМУМ СТАБИЛНЕ РАСПОДЕЛЕ

• Пример 1

$G_0(x) = e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ (Гумбелова расподела)

нека је $n \geq 2$, $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$

$$(G_0(a_n x + b_n))^n = G_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-ne^{-(a_n x + b_n)}} = e^{-e^{-x}}$$

$$n e^{-(a_n x + b_n)} = e^{-x}$$

$$\ln n - a_n x - b_n = -x$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_n = 1 \\ b_n = \ln n \end{matrix}}$$

Гумбелова расподела је М-стабилна. △

• Пример 2

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x \geq 0 \end{cases}$$ (Фрешеова расподела, $\alpha > 0$)

$$(G_{1,\alpha}(a_n x + b_n))^n = G_{1,\alpha}(x) \qquad x > 0$$

$$e^{-(a_n x + b_n)^{-\alpha} \cdot n} = e^{-x^{-\alpha}}$$

$$n(a_n x + b_n)^{-\alpha} = x^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = 0}$$

$$n a_n^{-\alpha} x^{-\alpha} = x^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Фрешеова расподела је М-стабилна. △

• Пример 3

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}}, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$ (Вејбулова расподела екстремних вредности, $\alpha > 0$)

$$(G_{2,\alpha}(a_n x + b_n))^n = G_{2,\alpha}(x) \qquad x < 0$$

$$e^{-(-a_n x - b_n)^{\alpha} \cdot n} = e^{-(-x)^{\alpha}}$$

$$n(-a_n x - b_n)^{\alpha} = (-x)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = 0}$$

$$n a_n^{\alpha} (-x)^{\alpha} = (-x)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

Вејбулова расподела је М-стабилна. △

Теорема о екстремалним штовима даје одговор на питање које се расподеле могу појавити као граничне расподеле линеарно нормираног максимума у низу независних сл. величина са истом расподелом.

ТЕОРИЈА РАЗАРАЊА

Процес ризика: $(K(t))_{t \geq 0}$ - описује промену вредности капитала осигуравајуће компаније током времена

$$K(t) = K(0) + p(t) - S(t)$$

$u := K(0)$ - почетни капитал

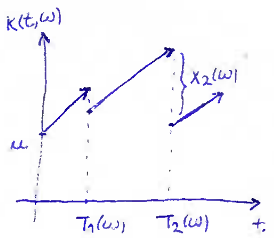
$p(t)$ - функција акумулације капитала на основу уплаћених премија осигурања

$S(t)$ - расход до кога долази због исплаћених одштета у интервалу $[0,t]$

⌈ Специјално, у Крамер-Лундберговом моделу:

$p(t) = ct$, $c > 0$ је брзина акумулације капитала (ен. premium rate).

Пример трајекторије $K(t,\omega)$:



⌊

Разарање $= \{K(t) < 0$ за неко $t > 0\}$

$T := \inf\{t > 0 : K(t) \leq 0\}$ – тренутак разарања

$\Psi(u) := P\{$Разарање $\mid K(0) = u\} = P\{T < +\infty\}$, $u > 0$ – вероватноћа разарања; њу посматрамо као функцију која зависи од почетног капитала u

$$\text{Разарање} = \{\inf_{t>0} K(t) < 0\} = \{\inf_{n\in\mathbb{N}} K(T_n) < 0\} = \{\inf_{n\in\mathbb{N}} (u + p(T_n) - S(T_n)) < 0\}$$

T_i су могући тренуци разарања

$$= \{\inf_{n\in\mathbb{N}} (u + cT_n - \sum_{k=1}^{n} X_k) < 0\}$$

у Крамер-Лундберговом моделу $p(t) = ct$

$$= \{\inf_{n\in\mathbb{N}} (u + c\sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=1}^{n} X_k) < 0\}$$

$$= \{\inf_{n\in\mathbb{N}} (u + \sum_{k=1}^{n} (cY_k - X_k)) < 0\}$$

$$= \{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} (cY_k - X_k) < -u\}$$

$$= \{\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - cY_k) > u\}$$

Уведу се ознаке: $Z_k := X_k - cY_k$ ((Z_n) је iid низ сл. величина)

$S_n := \sum_{k=1}^{n} Z_k$, $S_0 = 0$ ($(S_n)_{n\geq 0}$ је случајно лутање).

Тада важи:

$$\Psi(u) = P\{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n > u\}$$

$1 - \Psi(u) = P\{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \leq u\}$ – вероватноћа опстанка/преживљавања

За низ независних сл. величина (Z_n) важи јаки закон великих бројева, тј

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{с.с.}} EZ_1, \text{ при } n \to +\infty$$

Последица:

$S_n \to +\infty$ са вероватноћом једнаком 1 ако је $EZ_1 > 0$

$S_n \to -\infty$ са вероватноћом једнаком 1 ако је $EZ_1 < 0$

Дакле, ако је $EZ_1 > 0$ разарање је неизбежно, тј. дешава се са вероватноћом један независно од почетног капитала u.

Из теорије случајног лутања добија се да је $\Psi(u) = 1$ и за $EZ_1 = 0$.

Услов чистог профита: $EZ_1 = EX_1 - cEY_1 < 0$

[1.] Нека је $S_n = Z_1+Z_2+\dots+Z_n$ сл. лутање са $Z_i = X_i - cY_i$. Претпоставимо се да важи $EZ_1=0$ и $DZ_1<+\infty$. Показати да је
$$\lim_{u\to+\infty} \psi(u) \geq 1-\Phi(0) = 0.5$$
Φ - стандардна нормална расподела - ф-ја расподеле.

$\psi(u) = P\{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n > u\} \geq P\{S_n > u\}$ за $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{u\to+\infty}\psi(u) \geq \lim_{u\to+\infty} P\{S_n>u\} = \lim_{u\to+\infty} P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} > \frac{u-ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right\} = \lim_{u\to+\infty} P\left\{\underbrace{\frac{S_n}{\sqrt{nDZ_1}}}_{\sim N(0,1) \text{ за велико } n} > \underbrace{\frac{u}{\sqrt{nDZ_1}}}_{\to 0\,;\ \text{при } n\to+\infty}\right\}$$
$\uparrow$ ЦГТ

Z_i - низ независних сл. величина са истом расподелом

$ES_n = \sum_{i=1}^n EZ_i = 0$

$DS_n = \sum_{i=1}^n DZ_i = nDZ_1$
$\uparrow$ независност

$$= \lim_{u\to+\infty}(1-\Phi(0)) = 1-0.5 = 0.5$$

$\triangle$

Закључак: може се показати да под усл. $EZ_1=0$ и $DZ_1<+\infty$ до разарања долази са вероватноћом 1, тј. $\psi(u)=1$ за $\forall u>0$ симетрично сл. лутање

Тврђење: (Разарање са вероватноћом 1)
Ако су EY_1 и EX_1 коначни и важи
$$EZ_1 = EX_1 - cEY_1 \geq 0$$
тада, за свако фиксирано $u>0$, до разарања долази са вероватноћом 1.

⌐ Сл. лутање (S_n) задовољава јаки закон в.б.
$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.c.} EZ_1$, при $n\to+\infty$
што, посебно, имплицира $S_n \xrightarrow{c.c.} \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$ у зависности да ли је EZ_1 позитивно или негативно.
Ако је $EZ_1>0$ разарање је неизбежно без обзира на величину почетног капитала.
⌙

ДЕФ: Услов чистог профита
модел обнављања задовољава услов чистог профита ако је
$$\boxed{EZ_1 = EX_1 - cEY_1 < 0}$$

Сетујмо,
К-Л модел
$ES(t) = EN(t)\cdot EX_1 = \lambda t EX_1 = \frac{EX_1}{EY_1}t$
Тенденција да се изабере
$$\boxed{c > \frac{EX_1}{EY_1}}$$

[2.] Нека је $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $t\geq 0$ укупна вредност захтева за одштетама до тренутка t, (X_i) је низ независних, једнако расподељених позитивних сл. величина захтева за одштетама, независан од Пуасоновог процеса N, који има с.с. позитивну и непрекидну ф-ју интензитета λ. Нека је
$$p_1(t) = c\int_0^t \lambda(s)\,ds = c\mu(t)$$
где је $c>0$ брзина акумулације капитала, и нека је вероватноћа разарања
$$\psi_1(u) = P\{\inf_{t\geq 0}(u+p_1(t) - S(t)) < 0\}, \quad u>0 \text{ почетни капитал.}$$

(а) Показати да се $\psi_1(u)$ поклапа са вероватноћом разарања у К-Л. моделу, са интензитетом (Пуасоновог процеса N) 1.

(б) Који услов мора бити испуњен да би се избегло разарање са вероватноћом 1?

(а) К-Л. модел, показано на прошлом часу
$$\psi(u) = P\{\inf_{t\geq 0}(u + c\sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i) < 0\} \quad Y_i \in \mathcal{E}(1), \text{ независне } i=1,2,\dots,n$$

Дати модел:

$$\psi_1(u) = P\{\inf_{t\ge 0}(u + p_1(t) - \underbrace{S(t)}_{=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i}) < 0\}$$

$$= P\{\inf_{n\ge 1}(u + p_1(T_n) - \sum_{i=1}^{n} X_i) < 0\}$$

$$= P\{\inf_{n\ge 1}(u + c\mu(T_n) - \sum_{i=1}^{n} X_i) < 0\}$$

$$= P\{\inf_{n\ge 1}(u + c\sum_{i=1}^{n}\mu(T_{i-1}, T_i] - \sum_{i=1}^{n} X_i) < 0\}$$

$$\mu(T_n) = \underbrace{\mu(T_n) - \mu(T_{n-1})}_{\mu(T_{n-1},T_n]} + \underbrace{\mu(T_{n-1}) - \mu(T_{n-2})}_{\mu(T_{n-2},T_{n-1}]} + \dots + \underbrace{\mu(T_2) - \mu(T_1)}_{\mu(T_1,T_2]} + \mu(T_1) - \underbrace{\mu(T_0)}_{=0}$$

доказивано: $\mu(T_{i-1}, T_i] \in \mathcal{E}(1)$, независне

па $Y_i \overset{d}{=} \mu(T_{i-1}, T_i]$

$\Rightarrow$ Закључак △

(б) Услов чистог профита

$E(X_1 - cY_1) < 0$

$c > \frac{EX_1}{EY_1}$

Елементарна горња граница за вероватноћу разарања $\psi(u)$:
Увек се претпоставља модел обнављања са испуњеним условом чистог профита. Додатна претпоставка је да су у питању мале одштете:
тј. тј. постојање ф-је генератрисе момената (генераторне ф-је момената) расподеле величина захтева за одштетом у околини нуле

$$M_{X_1}(s) = Ee^{sX_1}, \quad s \in (-s_0, s_0) \text{ за неко } s_0 > 0$$ ← УСЛОВ МАЛИХ ОДШТЕТА

<u>ДЕФ</u> Лундбергов коефицијент

Нека постоји ф-ја генератриса момената Z_1, $Z_1 = X_1 - cY_1$, у некој околини $(-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$, нуле. Ако постоји јединствено позитивно решење једначине

$$M_{Z_1}(s) = Ee^{sZ_1} = Ee^{s(X_1 - cY_1)} = 1$$

по s, онда се оно назива Лундбергов коефицијент A.

3 Нека је дат К-Л модел са интензитетом (Пуасоновог процеса N) $\lambda > 0$ и нека величине захтева за одштетом X_i имају $\Gamma(\alpha, \beta)$ расподелу. Нека важи услов чистог профита. Израчунати Лундбергов коефицијент за $\alpha = 1, 2, 3$.

$X_i \in \Gamma(\alpha, \beta)$ $\quad \alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \ge 0$$

$EX_i = \frac{\alpha}{\beta}$

$Y_i \in \mathcal{E}(\lambda)$

$EY_i = \frac{1}{\lambda}$

Услов чистог профита:

$EZ_i < 0$

$E(X_i - cY_i) < 0$

$EX_i - cEY_i < 0$

$\Rightarrow c > \frac{EX_i}{EY_i}$

тј. $\boxed{c > \frac{\alpha\lambda}{\beta}}$

$$M_{Z_1}(s) = Ee^{sZ_1} = Ee^{s(X_1 - cY_1)} = E(e^{sX_1} \cdot e^{-csY_1}) \overset{\text{нез } X_i \text{ и } Y_i}{=} M_{X_1}(s) \cdot M_{Y_1}(-cs)$$

$$M_{X_1}(s) = Ee^{sX_1} = \int_0^{+\infty} e^{sx} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \beta^\alpha \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{sx}\,dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\beta - s)}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} (\beta - s)x = t \\ dx = \frac{dt}{\beta - s} \end{array} \right\}$$

$\beta - s > 0$ тј. $\boxed{s < \beta}$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\beta - s)^{\alpha-1}} e^{-t} \frac{dt}{\beta - s} = \frac{\beta^\alpha}{\cancel{\Gamma(\alpha)}(\beta - s)^\alpha} \int_0^{+\infty} \cancel{t^{\alpha-1} e^{-t} dt} = \left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^\alpha$$

$cs + \lambda$ тј. $\boxed{s > 0}$

$$M_{Y_1}(-cs) = Ee^{-csY_1} = \int_0^{+\infty} e^{-csy} \lambda e^{-\lambda y}\,dy = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-y(cs + \lambda)}\,dy = \frac{\lambda}{cs + \lambda} \cdot -e^{-y(cs+\lambda)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{cs + \lambda}$$

Треба решити једначину:

$$\left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^\alpha \cdot \frac{\lambda}{cs + \lambda} = 1$$

$\alpha=1$

$$\frac{\beta}{\beta-s}\cdot\frac{\lambda}{cs+\lambda}=1$$

$$\beta\cancel{\lambda}=\beta cs+\cancel{\beta\lambda}-cs^2-s\lambda \Rightarrow s(cs+\lambda-\beta c)=0 \;/ : s \quad s\neq 0$$

$$s=\frac{\beta c-\lambda}{c}=\boxed{\beta-\frac{\lambda}{c}}$$

Решење је "кандидат" за Лундбергов коефицијент; треба, још проверити да ли је строго позитивно

$\boxed{\beta-\frac{\lambda}{c}>0}$ на основу важења услова чистог профита, који за $\alpha=1$ гласи $c>\frac{\lambda}{\beta}$ тј. $\beta>\frac{\lambda}{c}$

$$\boxed{A=\beta-\frac{\lambda}{c}}$$

$\alpha=2$

$$\frac{\beta^2}{(\beta-s)^2}\cdot\frac{\lambda}{cs+\lambda}=1$$

$$\beta^2\lambda=(\beta^2-2\beta s+s^2)(cs+\lambda)$$

$$\cancel{\beta^2\lambda}=\beta^2cs+\cancel{\beta^2\lambda}-\underline{2\beta cs^2}-2\beta\lambda s+\underline{cs^3}+\underline{\lambda s^2} \Rightarrow s(cs^2+(\lambda-2\beta c)s+\beta^2c-2\beta\lambda)=0 \;/ : s \quad s\neq 0$$

$$s_{1/2}=\frac{-(\lambda-2\beta c)\pm\sqrt{\lambda^2-\cancel{4}\lambda\beta c+\cancel{4\beta^2c^2}-\cancel{4\beta^2c^2}+\cancel{8}\lambda\beta c}}{2c}$$

$$=\frac{-\lambda+2\beta c\pm\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}}{2c}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_1=\frac{2\beta c-\lambda-\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}}{2c}}$$

$$s_2=\frac{2\beta c-\lambda+\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}}{2c}$$

услов чистог профита за $\alpha=2$

$$\boxed{c>\frac{2\lambda}{\beta}}$$

$\beta c>2\lambda$

$s_1 \overset{?}{>} 0$

$$\frac{2\beta c-\lambda-\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}}{2c}>0 \;/ \cdot 2c$$

$$\underbrace{2\beta c-\lambda}_{>0}>\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c} \;/^2$$

услов чистог профита

$$4\beta^2c^2-4\beta c\lambda+\cancel{\lambda^2}>\cancel{\lambda^2}+4\lambda\beta c$$

$\beta^{\cancel{2}}c^{\cancel{2}}>2\lambda\cancel{\beta c}$ услов чистог профита. ✓

$\Rightarrow$ $0<s_1<s_2$ Оба су позитивна. Које је тражено решење? Оно које је мање од β

$s_2 \overset{?}{>} \beta$

$$2\beta c-\lambda+\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}>2\beta c$$

$$\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}>\lambda \quad ✓$$

s_2 сигурно није решење

$s_1 \overset{?}{<} \beta$

$$2\beta c-\lambda-\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}<2\beta c$$

$$-\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}<\lambda \quad ✓$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{2\beta c-\lambda-\sqrt{\lambda^2+4\lambda\beta c}}{2c}}$$

Услови који морају да важе:

1. УЧП $c>\frac{\alpha\lambda}{\beta}$
2. услови из генераторних ф-ја

$M_{X_1}(s) \rightsquigarrow \beta-s>0$ тј. $\boxed{s<\beta}$

$M_{Y_1}(s) \rightsquigarrow s<\lambda$; када је аргумент $-cs$ ова неједнакост постаје $-cs<\lambda$, тј. $s>-\frac{\lambda}{c}$ ($\lambda>0$, $c>0$)

тривијалан услов $\boxed{s>0}$

△

① Лундбергова неједнакост

По модел обнављања са важењем услова чистог профита. По, такође, да постоји Лундбергов коефицијент A. Тада неједнакост

$\psi(u)\le e^{-Au}$ важи за $\forall u>0$.

Заштитни додатак: ρ

К-Л модел

$$p(t)=(1+\rho)ES(t)=(1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1}t \Rightarrow c=(1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1} \Rightarrow 1+\rho=\frac{cEY_1}{EX_1}$$

и задовољен је услов чистог профита.

по принципу очекиване вредности

[4] Нека $X_1 \in \Gamma(2,2)$

$\rho = 10\%$

$Y_1 \in \mathcal{E}(\lambda)$

Израчунати Лундбергов коефицијент A.

Израчунато:

$$A = \frac{2\beta c - \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\beta c}}{2c} = \frac{2\cdot 2\cdot 1.1\cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\cdot 2\cdot 1.1\lambda}}{2\cdot 1.1\cancel{\lambda}} = \frac{4.4 - 1 - \sqrt{9.8}}{2.2} = \frac{3.4 - \sqrt{9.8}}{2.2} \approx \boxed{0.1225}$$

$$c = (1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1} = 1.1\cdot\frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{\lambda}} = 1.1\lambda$$

[5] Нека $X_1 \in \Gamma(2.5, 2.5)$

$\rho = 5\%$

$Y_1 \in \mathcal{E}(\lambda)$

Израчунати горњу границу за Лундбергов коефицијент A и користећи нумеричке методе одредити приближну вредност за A на четири децимале.

Услов чистог профита:

$$\boxed{c > \lambda}$$

$$c = (1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1} = \boxed{1.05\lambda}$$

Треба решити једначину

$$\left(\frac{2.5}{2.5-s}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{\lambda}{1.05\lambda s + \lambda} = 1$$

тј $\left(\frac{5}{5-2s}\right)^{\frac{5}{2}} = 1.05s + 1$ $\qquad s < 2.5$

може да се дође до решења коришћењем погодног софтвера или апроксимацијом:

$$e^{Ax} \ge 1 + Ax + \frac{(Ax)^2}{2} \quad \text{за } x \ge 0 \qquad \left(M_{X_1}(A)\cdot\frac{\lambda}{cA+\lambda} = 1 \quad \text{тј.} \quad \lambda + cA = \lambda M_{X_1}(A)\right)$$

$$\lambda\int_0^{+\infty} e^{Ax} f(x)\,dx \ge \lambda\int_0^{+\infty}\left(1 + Ax + \frac{(Ax)^2}{2}\right) f(x)\,dx$$

f је густина расподеле сл. величине X_1

$$\cancel{\lambda} + cA \ge \lambda\left(\cancel{1} + AEX_1 + \frac{A^2}{2}E(X_1^2)\right)$$

$$\Rightarrow A(c - \lambda EX_1) \ge \frac{\lambda}{2}A^2 E(X_1^2) \quad /:A$$

$$\boxed{A \le \frac{2(c-\lambda EX_1)}{\lambda E(X_1^2)} \quad \text{добра апр.}}$$

$EX_1 = \frac{\alpha}{\beta} = 1$

$DX_1 = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$ $\quad \Rightarrow E(X_1^2) = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$

$$A \le \frac{2(1.05\cancel{\lambda} - \cancel{\lambda})}{\cancel{\lambda}\cdot\frac{7}{5}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{14} = 0.07143$$

Newton–Raphson method

$A = 0.0685$

Вероватноћа преживљавања: $\varphi(u) = 1-\psi(u)$

Претпоставља се да се разматра Крамер-Лундбергов модел и да важи услов чистог профита.

$$\varphi(u)=\varphi(0)+\frac{1}{(1+\rho)EX_1}\int_0^u(1-F_{X_1}(y))\,\varphi(u-y)\,dy$$

под пт. $EX_1<+\infty$

X_1 је сл. величина апсолутно-непрекидног типа ($\exists$ густина $f(x)$)

ρ је заштитни коефицијент / додатак

Може се одредити: $\boxed{\varphi(0)=\frac{\rho}{1+\rho}}$.

Даље је
$$\varphi'(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\varphi(u-x)\,dF_{X_1}(x)$$
$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)f(x)\,dx$$

Лапласова трансформација

Нека је $h(y)$ функција дефинисана за $\forall y\ge 0$.
Лапласова трансформација ф-је h дата је са
$$h^*(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sy}h(y)\,dy$$

1) Нека су h_1 и h_2 ф-је за које постоји Лапласова трансформација и нека су α_1 и α_2 const. Тада је
$$\alpha_1h_1^*(s)+\alpha_2h_2^*(s)=(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)^*(s)$$

2) Нека је h ф-ја за коју постоји Лапласова трансформација и нека је $H(x)=\int_0^x h(y)\,dy$. Тада је
$$H^*(s)=\frac{h^*(s)}{s}$$

3) Нека је h диференцијабилна ф-ја за коју постоји Лапласова трансформација. Тада је
$$(h')^*(s)=sh^*(s)-h(0)$$

4) Нека је $h(x)=\int_0^x h_1(y)h_2(x-y)\,dy$ конволуција ф-ја h_1 и h_2 за које постоји Лапласова трансформација.
Тада је
$$h^*(s)=h_1^*(s)\cdot h_2^*(s)$$

- $h(y)=1$ за $y\ge0 \rightsquigarrow h^*(s)=\frac{1}{s}$
- $h(y)=e^{-\alpha y}$ за $y\ge0 \rightsquigarrow h^*(s)=\frac{1}{s+\alpha}$
- $h(y)=1-pe^{-\alpha y}-qe^{-\beta y}$, $y\ge 0 \rightsquigarrow h^*(s)=\frac{1}{s}-\frac{p}{s+\alpha}-\frac{q}{s+\beta}$ $\quad\alpha,\beta>0$

$$\boxed{\varphi^*(s)=\frac{c\varphi(0)}{cs-\lambda(1-f^*(s))}}$$

где је c стопа акумулације премија.

Пример (X_i) iid низ величина захтева за одштетом

$X_1\in\mathcal{E}(\alpha)$ тј. $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$, $x\ge0$

$EX_1=\frac{1}{\alpha}$

$$c=(1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1}=(1+\rho)\frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\rho}=\frac{\lambda}{c\alpha}\Rightarrow\varphi(0)=1-\frac{\lambda}{c\alpha}$$

$$f^*(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}\cdot\alpha e^{-\alpha x}\,dx=\frac{\alpha}{s+\alpha}$$

$$\varphi^*(s)=\frac{c-\frac{\lambda}{\alpha}}{cs-\lambda\left(1-\frac{\alpha}{s+\alpha}\right)}\overset{/:c}{=}\frac{1-\frac{\lambda}{\alpha c}}{s-\frac{\lambda}{c}\cdot\frac{s}{s+\alpha}}=\frac{(s+\alpha)\left(c-\frac{\lambda}{\alpha}\right)}{cs^2+c\alpha s-\lambda s}=\frac{(s+\alpha)\left(1-\frac{\lambda}{c\alpha}\right)}{s\left(s-\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)}$$
$$=\frac{1}{s}-\frac{\lambda}{c\alpha\left(s-\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)\right)}$$

неодређени коефицијенти:

$$As-A\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)+Bs=s\left(1-\frac{\lambda}{c\alpha}\right)+\alpha\left(1-\frac{\lambda}{c\alpha}\right)$$

$$A+B=1-\frac{\lambda}{c\alpha}$$

$$-A\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)=\alpha\left(1-\frac{\lambda}{c\alpha}\right)\Rightarrow\boxed{A=1}$$

$$\boxed{B=-\frac{\lambda}{c\alpha}}$$

$\Rightarrow \varphi(u)=1-\frac{\lambda}{c\alpha}e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})u}$ – вероватноћа преживљавања

$\psi(u)=\frac{\lambda}{c\alpha}e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})u}$ – вероватноћа разарања

△

1. (X_i) iid низ величина захтева за одштетом X_i има мешовиту експоненцијалну расподелу дату густином расподеле $f(x)=\frac{1}{2}(2e^{-2x}+\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}),\ x>0$

$\rho=10\%$

одредити вероватноћу разарања $\Psi(u)$.

Решење:

Прво се одређује вероватноћа преживљавања $\varphi(u)$.

$$\varphi^*(s)=\frac{c\varphi(0)}{cs-\lambda(1-f^*(s))}$$

$$\begin{cases} c=1.1\,\lambda\cdot 1=\frac{11}{10}\lambda \\ EX_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=1 \end{cases}\qquad f^*(s)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-sx}(2e^{-2x}+\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x})\,dx=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+\frac{2}{3}}$$

$\varphi(0)=\frac{1}{11}$

$$\varphi^*(s)=\frac{\frac{11}{10}\cancel{\lambda}\cdot\frac{1}{11}}{\frac{11}{10}\cancel{\lambda}s-\cancel{\lambda}(1-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+\frac{2}{3}})}\cdot\frac{10}{10}=\frac{1}{11s-10(1-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+\frac{2}{3}})}=\frac{(s+2)(3s+2)}{11s(3s^2+8s+4)-10(3s^2+8s+\cancel{4}-3s-\cancel{2}-s-\cancel{2})}$$

$$=\frac{(s+2)(3s+2)}{33s^3+88s^2+44s-30s^2-40s}=\frac{(s+2)(3s+2)}{33s(s^2+\frac{58}{33}s+\frac{4}{33})}=\frac{1}{33}\cdot\frac{3s^2+8s+4}{s(s+0.07191)(s+1.68567)}=\circledast$$

$$\left[\ s^2+\frac{58}{33}s+\frac{4}{33}=(s+0.07191)(s+1.68567)\ \right]$$

метода неодређених коефицијената:

$$\frac{A}{s}+\frac{B}{s+0.07191}+\frac{C}{s+1.68567}=\frac{3s^2+8s+4}{s(s+0.07191)(s+1.68567)}$$

$A+B+C=3$

$1.75758A+1.68567B+0.07191C=8$

$\underbrace{0.12122A}_{\text{тј. тачно }\frac{4}{33}}=4\ \Rightarrow\ \boxed{A=33}$

Даље, $\boxed{B=-29.64673}$

$\boxed{C=-0.35327}$

$$\circledast=\frac{1}{33}\cdot\left(\frac{33}{s}-\frac{29.64673}{s+0.07191}-\frac{0.35327}{s+1.68567}\right)$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{0.89839}{s+0.07191}-\frac{0.01071}{s+1.68567}$$

$$\Rightarrow\ \varphi(u)=1-0.89839e^{-0.07191\cdot u}-0.01071e^{-1.68567\cdot u}$$

$$\boxed{\Psi(u)=0.89839e^{-0.07191\cdot u}+0.01071e^{-1.68567\cdot u},\ u\geq 0}$$

$\triangle$

Крамерова асимптотска формула

$$\Psi(u)\sim C e^{-Au}$$

где је A Лундбергов коефицијент, а C Крамерова константа дефинисана са

$$C=\frac{\frac{c}{\lambda}-EX_1}{E(X_1e^{AX_1})-\frac{c}{\lambda}}$$

Специјално, ако $X_1\in\mathcal{E}(\alpha),\ \alpha>0$

$$\boxed{\Psi(u)=Ce^{-Au},\ u\geq 0}$$