Домаћи из случајних процеса,
Математички факултет, март 2016.

1. Нека су U и V независне случајне величине, где U има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ расподелу, а V нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ расподелу. Дефинисан је случајни низ на следећи начин:

$$X_1 = U, X_2 = -V, X_3 = -U, X_4 = V, X_{n+4} = X_n,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Испитати за какве $m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ је процес $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ слабо, односно строго стационаран.

2. Нека је $\{\xi(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом λ и Y случајна величина која не зависи од процеса $\{\xi(t), t \geq 0\}$ и за коју важи $P\{Y = -1\} = P\{Y = 1\} = 0.5$. Нека је $\{Z(t), t \geq 0\}$ случајни процес дефинисан са $Z(t) = (-1)^{\xi(t)} \cdot Y$.

а) Описати све тродимензионе расподеле случајног процеса $\{Z(t), t \geq 0\}$, а затим закључити како изгледају n-димензионе функције расподеле.

б) Испитати слабу стационарност случајног процеса $\{Z(t), t \geq 0\}$.

3. Нека је $\boldsymbol{X} = \{X(t), t > 0\}$ случајан процес са следећим својствима:

- $X(t)$ је случајна величина са експоненцијалном $\varepsilon\left(\dfrac{t}{a}\right)$ расподелом, $a > 0$
- корелациона функција случајног процеса $\boldsymbol{X}$ је функција $K(s,t) = \dfrac{a^2}{st} e^{-|t-s|}$, $s, t > 0$.

Нека је случајан процес $\boldsymbol{Y}$ дефинисан са $Y(t) = tX(t)$, $t > 0$. Испитати његову слабу стационарност; ортогоналност и независност прираштаја овог процеса.