Функција генератриса момената.

Дефиниција. Нека је X случајна величина. Функција генератриса момената (или: момент генераторна функција) сл. величине X (односно, њене расподеле вероватноћа), у ознаци $M_X(t)$, дефинисана је са

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\begin{cases}\sum\limits_{k:x_k\in\mathcal{S}_X} e^{tx_k}\cdot P\{X=x_k\}, & \text{ако је } X \text{ дискретног типа са скупом вредности } \mathcal{S}_X\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f(x)dx, & \text{ако је } X \text{ апсолутно непрекидног типа са густином расподеле } f(\cdot)\end{cases},$$

под претпоставком да горње математичко очекивање постоји за свако t у некој отвореној околини нуле (тј. за $|t|<t_0$, где је $t_0>0$). У супротном, сл. величина X нема функцију генератрису момената.

Ова функција добила је своје име по томе што је могуће одредити све моменте сл. величине X узастопним диференцирањем функције $M_X(t)$, по промењљивој t, и евалуацијом одговарајућег извода у тачки $t=0$, о чему говори следеће тврђење.

Лема. Ако случајна величина X има функцију генератрису момената $M_X(\cdot)$ онда сви њени моменти постоје (тј. $E|X|^r<+\infty$ за свако $r>0$) и важи:

$$EX^n=M_X^{(n)}(0),$$

где је $M_X^{(n)}(0)=\frac{d^n}{dt^n}M_X(t)\Big|_{t=0}$.

Карактеризација расподеле вероватноћа њеном функцијом генератрисом момената дата је у следећем тврђењу.

Лема. Нека су $M_X(\cdot)$ и $M_Y(\cdot)$, редом, функције генератрисе момената сл. величина X и Y. Ако постоји $h>0$ тако да важи $M_X(t)=M_Y(t)$ за $|t|<h$, онда X и Y имају исте расподеле вероватноћа.

Додатна својства функције генератрисе момената наведена су у наставку.

Лема. **(а)** Нека је X сл. величина са функцијом генератрисом момената $M_X(\cdot)$ и нека је Y сл. величина дефинисана са $Y=aX+b$, где су $a,b\in\mathbb{R}$. Тада важи:

$$M_Y(t)=e^{tb}\cdot M_X(at).$$

(б) Нека су $X_1,X_2,\ldots,X_n$ независне сл. величине које имају, редом, функције генератрисе момената $M_{X_1}(\cdot)$, $M_{X_2}(\cdot),\ldots$, $M_{X_n}(\cdot)$ за $|t|<h$, где је $h>0$. Нека је X сл. величина дефинисана са $X=\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$. Тада важи:

$$M_X(t)=\prod_{j=1}^{n}M_{X_j}(t).$$

Доказ дела **(б)** базира се на чињеници да ако су сл. величине $X_1,X_2,\ldots,X_n$ независне, онда су независне и њихове функције $e^{tX_1},e^{tX_2},\ldots,e^{tX_n}$ (ПОКАЗАТИ), па су испуњени услови за примену 'теореме о производу' за мат. очекивање.

Пример. Одредити функције генератрисе момената следећих расподела вероватноћа:
(а) биномне расподеле с параметрима n и p, $n\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$
(б) нормалне расподеле с параметрима m и σ^2, $m\in\mathbb{R}$, $\sigma\in(0,+\infty)$.

Решење.
(а) Нека $X\in\mathcal{B}(n,p)$. Ова сл. величина може се представити као

$$X=\sum_{j=1}^{n}I_j,$$

где су $I_1,I_2,\ldots,I_n$ независне, једнако расподељене сл. величине са $Ber(p)$ расподелом вероватноћа. Сл. величина I_1 има функцију генератрису момената дату са

$$M_{I_1}(t)=1-p+pe^t,$$

а онда, позивајући се на други део горњег тврђења, X има функцију генератрису момената дату са

$$M_X(t)=(1-p+pe^t)^n.$$

(б) Нека $X \in \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ и $Y \in \mathcal{N}(0,1)$. Сл. величина Y има функцију генератрису момената дату са

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}},$$

а онда, позивајући се на први део горњег тврђења, X има функцију генератрису момената дату са

$$M_X(t) = M_{\sigma Y+m}(t) = e^{tm+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

$\triangle$

Нормална расподела и централна гранична теорема.

Лема. Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ сл. величина и $F_n(\cdot)$, $M_n(\cdot)$, редом, функција расподеле и функција генератриса момената сл. величине X_n. Нека је $F(\cdot)$ функција расподеле и $M(\cdot)$ њој одговарајућа функција генератриса момената. Ако, при $n \to +\infty$, важи

$$M_n(t) \to M(t) \quad \text{за свако } t \text{ у некој отвореној околини нуле}$$

онда, такође при $n \to +\infty$,

$$F_n(x) \to F(x) \quad \text{за сваку тачку } x \text{ непрекидности функције расподеле } F.$$

Теорема. (Централна гранична теорема) Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених сл. величина са мат. очекивањем $m \in \mathbb{R}$ и дисперзијом $\sigma^2 \in (0,+\infty)$. Ако је сл. величина S_n дата са $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $n \in \mathbb{N}$, онда, при $n \to +\infty$, важи

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \le x\right\} \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{за свако } x \in \mathbb{R}.$$

Доказ. Доказ који је наведен у наставку дат је при 'јачем' услову у коме се претпоставља егзистенција функције генератрисе момената $M(\cdot)$ чланова низа (X_n), за сваку вредност аргумента.

Довољно је доказати тврђење у случају: $m = 0$, $\sigma^2 = 1$. Ако је $m \neq 0$ или $\sigma^2 \neq 1$ уведе се нови низ (Y_n) сл. величина дефинисаних са $Y_n := \dfrac{X_n - m}{\sqrt{\sigma^2}}$ и парцијалне суме $T_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$, $n \in \mathbb{N}$, па је тада

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \le x\right\} = P\left\{\frac{T_n}{\sqrt{n}} \le x\right\}.$$

Нека је $Z_n := \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$. Идеја је да се покаже да, при $n \to +\infty$, низ функција генератриса момената сл. величина Z_n, $n \in \mathbb{N}$, конвергира тачка по тачка ка функцији генератриси момената стандардне нормалне расподеле. Одатле се, позивом на претходну лему, завршава доказ.

Дакле, на основу независности и једнаке расподељености чланова низа (X_n) прво се добија:

$$M_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} M_{X_j}(t) = (M(t))^n,$$

а затим и

$$M_{Z_n}(t) = M_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

$$\Longrightarrow \ln M_{Z_n}(t) = n \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Примењујући Маклоренову формулу два пута:($M(\theta) = M(0) + M'(0)\theta + \dfrac{M''(0)}{2!}\theta^2 + R_2(\theta)$ за θ у околини нуле, где је $R_2(\theta)$ остатак) добија се

$$M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 + \frac{t^2}{2n},$$

($\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!} + R_n(x)$) коначно и

$$\lim_{n\to+\infty} \ln M_{Z_n}(t) = \frac{t^2}{2}$$

$\blacksquare$