Први колоквијум из Вероватноће и статистике А - смерови МНВ **13.12.2014.**

1. Четири играча играју неку игру стандардним шпилом од 52 карте, при чему се сваком играчу на почетку подели по 13 карата. Израчунати вероватноћу да сваки играч има по једног кеца.

Решење

Карте играчима можемо поделити на $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ начина. Посматрајмо шпил подељен на четири кеца и 48 осталих карата. Сваком играчу треба да поделимо по једног кеца и по 12 осталих карата. Приметимо да играчима кечеве можемо поделити на 4! начина, док им остале карте можемо поделити на $\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$ начина. Стога је тражена вероватноћа:

$$P(A) = \frac{4! \cdot \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}.$$

2. Нека су $E, F \in \mathscr{A}$ дисјунктни случајни догађаји у вези са одређеним експериментом. Врше се независна извођења овог експеримента. Одредити вероватноћу да се догађај E реализује пре догађаја F.

Решење

Обзиром да су догађаји E и F дисјунктни, вероватноћа догађаја $C = E \cup F$ је: $P(C) = P(E) + P(F)$. Означимо са A догађај да се догађај E реализује пре догађаја F, при независним извођењима експеримента у вези са којим су догађаји E и F. Повољни исходи за догађај A се састоје из произвољног броја реализација догађаја $\overline{C} = \overline{E \cup F}$ (не догађају се ни E, ни F), праћеног реализацијом догађаја E. Стога је тражена вероватноћа:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\overline{C})^k \cdot P(E) = \frac{P(E)}{1 - P(\overline{C})} = \frac{P(E)}{P(C)} = \frac{P(E)}{P(E) + P(F)}.$$

3. Човек је замолио свог првог комшију да залива две његове (осетљиве) биљке док је он на одмору. Без заливања свака од ових биљака увене у 80% случајева, а ако се залива, свака од њих увене у 15% случајева. Човек је, познајући свог комшију дуги низ година, 90% сигуран да ће се комшија сетити да залива сваку од биљака (независно од оне друге).

а) Израчунати вероватноћу да бар једна од биљака буде жива по повратку човека са одмора.

б) Посматра се појединачна биљка. Ако је она увенула, израчунати вероватноћу да је комшија заборавио да је залива.

Решење

а) Означимо са A догађај да је бар једна биљка жива по повратку човека са одмора. Тада је $\overline{A}$ догађај да су обе биљке увенуле. Означимо са $\overline{A_1}$ догађај да је увела прва биљка, а са $\overline{A_2}$ догађај да је увела друга биљка. Очигледно је да је $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2})$, као и да је $\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$.
Из услова задатка добијамо да је: $P(\overline{A_1}) = 90\% \cdot 15\% + 10\% \cdot 80\% = 21.5\%$.
Даље имамо да је: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - \left(P(\overline{A}_1)\right)^2 = 1 - 4.6225\% = 95.3775\%$.

б) Нека је H_1 догађај да се комшија сетио да залива биљку, а H_2 догађај да је заборавио. Нека је B догађај да је биљка увенула. Тражена вероватноћа је:

$$P(H_2|B) = \frac{P(BH_2)}{P(B)} = \frac{P(H_2)P(B|H_2)}{P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2)} = \frac{10\% \cdot 80\%}{90\% \cdot 15\% + 10\% \cdot 80\%} = \frac{16}{43}.$$

4. Студенти, у групи која броји пет момака и пет девојака, рангирани су (у опадајућем поретку) на основу резултата писменог испита. Претпоставља се да су сви резултати међусобно различити и да су сви могући распореди студената на ранг листи једнако вероватни. Случајна величина X представља највиши ранг неке од девојака у овој групи. Одредити расподелу случајне величине X. Скицирати график њене функције расподеле.

Решење

Случајна величина X узима вредности из скупа $\{1,2,3,4,5,6\}$.

$P\{X=1\} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ (прва на листи је девојка).

$P\{X=2\} = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{18}$ (први на листи је дечак, друга на листи је девојка).

$P\{X=3\} = \left(\dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9}\right) \cdot \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{36}$ (прва двојица на листи су дечаци, трећа на листи је девојка).

$P\{X=4\} = \left(\dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8}\right) \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{5}{84}$.

$P\{X=5\} = \left(\dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7}\right) \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{252}$.

$P\{X=6\} = \left(\dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{6}\right) \cdot \dfrac{5}{5} = \dfrac{1}{252}$.

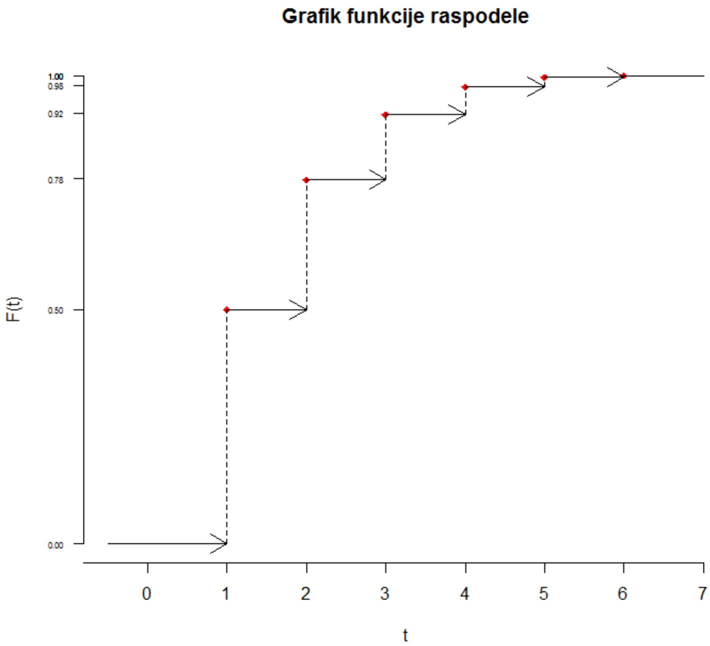
Функција расподеле случајне величине X:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le t < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{5}{18}, & 2 \le t < 3 \\ \frac{1}{2} + \frac{5}{18} + \frac{5}{36}, & 3 \le t < 4 \\ \frac{1}{2} + \frac{5}{18} + \frac{5}{36} + \frac{5}{84}, & 4 \le t < 5 \\ \frac{1}{2} + \frac{5}{18} + \frac{5}{36} + \frac{5}{84} + \frac{5}{252}, & 5 \le t < 6 \\ 1, & t \ge 6 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1/2, & 1 \le t < 2 \\ 7/9, & 2 \le t < 3 \\ 33/36, & 3 \le t < 4 \\ 246/252, & 4 \le t < 5 \\ 251/252, & 5 \le t < 6 \\ 1, & t \ge 6 \end{cases}$$

График функције расподеле случајне величине X је на следећој страници.

График функције расподеле случајне величине X:



5. Кошаркаш A погађа слободно бацање са вероватноћом 0.8, а кошаркаш B са вероватноћом 0.65. Они се међусобно надмећу тако што наизменично гађају кош, све док га један од њих не погоди. Игру почиње играч B. Одредити законе расподела случајних величина Y и Z, при чему оне представљају, редом, број бацања играча A, односно играча B. Затим, израчунати вероватноћу да је A извео највише три бацања пре него што је надметање завршено.

Решење

Означимо са p_B вероватноћу да играч B погоди кош у једном бацању (p_A за играча A).
Означимо са B_k догађај да је играч B погодио кош у k-том бацању (аналогно за играча A).

Сада можемо описати простор исхода на следећи начин: $\Omega = \{B_1, \overline{B_1}A_1, \overline{B_1}\,\overline{A_1}B_2, \overline{B_1}\,\overline{A_1}\,\overline{B_2}A_2, ...\}$. Приметимо да исходи $\overline{B_1}A_1$ и $\overline{B_1}\,\overline{A_1}B_2$ чине догађај $\{Y = 1\}$, док исходи $\overline{B_1}\,\overline{A_1}B_2$ и $\overline{B_1}\,\overline{A_1}\,\overline{B_2}A_2$ чине догађај $\{Z = 2\}$. Сада можемо закључити ($k > 1$):

$P\{Y = 0\} = p_B$ (ако играч B из прве погоди, играч A неће уопште гађати);
$P\{Y = 1\} = (1 - p_B)p_A + (1 - p_B)(1 - p_A)p_B$ (исходи $\overline{B_1}A_1$ и $\overline{B_1}\,\overline{A_1}B_2$);
$\vdots$
$P\{Y = k\} = (1 - p_B)^k(1 - p_A)^{k-1}p_A + (1 - p_B)^k(1 - p_A)^k p_B$
(**ИЛИ** обојица промаше по $k - 1$ пута, затим B промаши, па A погоди**; ИЛИ** обојица промаше по k пута, па затим B погоди - играч A је у оба случаја гађао тачно k пута).

$P\{Z = 1\} = p_B + (1 - p_B)p_A$ (исходи B_1 и $\overline{B_1}A_1$);
$P\{Z = 2\} = (1 - p_B)(1 - p_A)p_B + (1 - p_B)^2(1 - p_A)p_A$ (исходи $\overline{B_1}\,\overline{A_1}B_2$ и $\overline{B_1}\,\overline{A_1}\,\overline{B_2}A_2$);
$\vdots$
$P\{Z = k\} = (1 - p_B)^{k-1}(1 - p_A)^{k-1}p_B + (1 - p_B)^k(1 - p_A)^{k-1}p_A$.
(**ИЛИ** обојица промаше по $k - 1$ пута, затим B погоди**; ИЛИ** обојица промаше по $k - 1$ пута, затим B промаши још једном, а затим A погоди - играч B је у оба случаја гађао тачно k пута).

$P\{Y \leq 3\} = P\{Y = 0\} + P\{Y = 1\} + P\{Y = 2\} + P\{Y = 3\}$.