

1. Случајна величина X представља број бацања стандардне коцкице за игру до појаве једног од бројева из скупа $\{1, 2, 4, 6\}$.

- а) Коју расподелу вероватноћа има случајна величина X ? (1 поен)
 б) Колико износи математичко очекивање случајне величине X ? (1 поен)

Решење

- а) Обзиром да су четири исхода повољна од шест могућих, случајна величина X има геометријску $\mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$ расподелу вероватноћа.
 б) Математичко очекивање случајне величине X је $E(X) = \frac{3}{2}$.

2. Вероватноћа догађаја A при неком експерименту је $P(A) = \frac{3}{8}$. Случајна величина Y представља број реализација догађаја A у 100 независних извођења тог експеримента.

- а) Коју расподелу вероватноћа има случајна величина Y ? (1 поен)
 б) Одредити вероватноћу догађаја $\{Y = 21\}$. (1 поен)
 в) Колико износи математичко очекивање случајне величине Y ? (1 поен)

Решење

- а) Случајна величина Y има биномну $\mathcal{B}\left(100, \frac{3}{8}\right)$ расподелу вероватноћа.
 б) $P\{Y = 21\} = \binom{100}{21} \left(\frac{3}{8}\right)^{21} \left(\frac{5}{8}\right)^{79}$.
 в) Математичко очекивање случајне величине Y је $E(Y) = 100 \cdot \frac{3}{8} = \frac{75}{2}$.

3. У кутији се налазе четири цедуље које су нумерисане бројевима 1,2,3,4. Цедуље се извлаче (без враћања) до појаве цедуље са непарним бројем. Нека случајна величина X представља збир извучених бројева, а случајна величина Y број извучених цедуља.

- а) Одредити расподелу вероватноћа случајног вектора (X, Y) . (2 поена)
 б) Одредити расподелу вероватноћа случајне величине $Z = XY$. (1 поен)
 в) Испитати независност случајних величина X и Y . (2 поена)

Решење

- а) Простор исхода је $\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423\}$. Исходи **нису** једнако вероватни.
 $P(1) = P(3) = \frac{1}{4}$,
 $P(21) = P(23) = P(41) = P(43) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$,
 $P(241) = P(243) = P(421) = P(423) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.
 $X(1) = 1, \quad X(3) = X(21) = 3, \quad X(23) = X(41) = 5,$
 $X(43) = X(241) = X(421) = 7, \quad X(243) = X(423) = 9.$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

$$Y(1) = Y(3) = 1, \quad Y(21) = Y(23) = Y(41) = Y(43) = 2, \quad Y(241) = Y(243) = Y(421) = Y(423) = 3.$$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Дакле, расподела вероватноћа случајног вектора (X, Y) је :

Y / X	1	3	5	7	9
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0
3	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

б) Расподела вероватноћа случајне величине $Z = XY$ је : $\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 14 & 21 & 27 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right)$.

в) $P\{X = 5, Y = 2\} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = P\{X = 5\} \cdot P\{Y = 2\}$.

Дакле, случајне величине X и Y су зависне случајне величине.