Први тест из Вероватноће и статистике А - смерови МНВ **16.11.2014.**

1. Шеснаест идентичних кликера се на случајан начин распоређује у пет различитих кутија.

а) Колико има могућих распореда?

б) Израчунати вероватноћу да су тачно две кутије празне.

в) Израчунати вероватноћу да у бар једној кутији има више од седам кликера.

Решење

а) 16-комбинације са понављањем петочланог скупа.
Укупно их има $\binom{16+5-1}{5-1} = \binom{16+5-1}{16} = \binom{20}{4}$.

б) Изаберимо две кутије које су празне (то можемо урадити на $\binom{5}{2}$ начина). Затим, ставимо по један кликер у сваку од преостале три кутије (да осигурамо да оне нису празне). Осталих $16-3=13$ кликера можемо произвољно да распоредимо у три кутије које нису празне. Дакле, ако са A означимо догађај да су тачно две кутије празне, вероватноћа догађаја A је:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{13+3-1}{3-1}}{\binom{20}{4}} = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} .$$

в) Да бисмо осигурали да у бар једној кутији има више од седам кликера, ставићемо осам кликера у произвољну кутију (кутију бирамо на $\binom{5}{1}$ начина). Осталих осам кликера можемо произвољно да распоредимо у свих пет кутија. Међутим, приметимо да смо на овај начин два пута бројали случајеве када се у две кутије налази по осам кликера (таквих случајева има $\binom{5}{2}$). Дакле, уколико са B означимо догађај да се у бар једној кутији налази више од седам кликера, вероватноћа догађаја B је:

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{8+5-1}{5-1} - \binom{5}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{\binom{5}{1}\binom{12}{4} - \binom{5}{2}}{\binom{20}{4}} .$$

2. Нека су $E, F, G \in \mathscr{A}$ случајни догађаји. Испитати тачност следећих исказа:

а) Ако важи: E и F су независни догађаји, E и G су независни догађаји, F и G су дисјунктни догађаји, тада су E и $F \cup G$ независни догађаји.

б) Ако важи: E и F су независни догађаји, F и G су независни догађаји, E и FG су независни догађаји, тада су G и EF независни догађаји.

в) Ако важи: E и F су независни догађаји, E и G су независни догађаји, тада су E и $F \cup G$ независни догађаји.

Решење

а) $P(E(F \sqcup G)) = P(EF \sqcup EG) = P(EF) + P(EG) \overset{(1)}{=} P(E)P(F) + P(E)P(G) = P(E)(P(F) + P(G)) = P(E)P(F \sqcup G)$, стога је исказ тачан.

(1) - догађаји E и F су независни, као и догађаји E и G.

б) $P(GEF) = P(EFG) = P(E)P(FG) = P(E)P(F)P(G) = P(G)P(EF)$, стога је исказ тачан.

в) Приметимо да је ослабљена претпоставка случаја а). Претпоставка која недостаје може да послужи као путоказ за контра пример (недостаје дисјунктност догађаја F и G).

3. Пет момака запише на цедуљу име своје мајке и тих пет цедуља ставе у чинију (све мајке се различито зову). Затим, један за другим, сваки од њих случајно извуче цедуљу из чиније. Израчунати вероватноћу да су тачно двојица извукла цедуљу са именом своје мајке.

Решење

Момци цедуље могу поделити на 5! начина.
Изаберимо два момка која ће извући цедуљу са именом своје мајке - то можемо урадити на $\binom{5}{2}$ начина. У чинији остају три имена мајки преостала три момка. Морамо да обезбедимо да ниједан од њих не извуче цедуљу са именом своје мајке. Први може да изабере једну од две цедуље са именима мајки друге двојице на $\binom{2}{1}$ начина. Када је први начинио свој избор, на преостале две цедуље су имена мајке првог и једног од друге двојице који тек треба да начине свој избор. Стога, друга двојица могу на само један начин да поделе цедуље, а да ниједан не узме цедуљу са именом своје мајке.
Уколико са A означимо догађај да су тачно двојица момака извукла цедуљу са именом своје мајке, вероватноћа догађаја A је :

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}}{5!} = \frac{10 * 2}{120} = \frac{1}{6} \ .$$