Поправни први тест из Вероватноће и статистике А - смерови МНВ **30.11.2014.**

1. Коцкица за игру се баца два пута. Израчунати вероватноћу да је збир палих бројева непаран, ако је у оба бацања пао број мањи од четири. (3 поена)

Решење

Означимо са A догађај да је збир палих бројева непаран, а са B догађај да је у оба бацања пао број мањи од четири. Треба да израчунамо $P(A|B)$.
Приметимо да је $B = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$, да је $AB = \{12, 21, 23, 32\}$, а да је $|\Omega| = 6^2 = 36$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{4}{9}.$$

2. а) A и B су догађаји такви да је $0 < P(B) < 1$ и важи $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.
Испитати независност догађаја A и B. (2 поена)

б) Нека су A и B догађаји чија је вероватноћа позитивна. Испитати тачност исказа:
Ако су A и B независни догађаји, онда имају непразан пресек. (2 поена)

Решење

а) Доказаћемо да су догађаји A и B независни, односно да је $P(AB) = P(A)P(B)$.

$$\begin{aligned}
P(A|B) = P(A|\overline{B}) &\implies \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}\\
&\implies P(AB)P(\overline{B}) = P(B)P(A\overline{B})\\
&\implies P(AB)\,(1 - P(B)) = P(B)\,(P(A) - P(AB))\\
&\implies P(AB) - \cancel{P(AB)P(B)} = P(B)P(A) - \cancel{P(B)P(AB)}\\
&\implies P(AB) = P(A)P(B)
\end{aligned}$$

б) $P(A) > 0, P(B) > 0$, а догађаји A и B су независни, па је $P(AB) = P(A)P(B) > 0$. Обзиром да догађај AB, такође, има позитивну вероватноћу, AB не може бити празан скуп (немогућ догађај). Дакле, исказ је тачан.

3. Четири ђака првака полазе у школу. У комплету школског прибора имамо шест идентичних оловака, осам идентичних свезака и девет идентичних књига. На колико начина се школски прибор може поделити ђацима, тако да свако од њих добије бар по једну оловку, бар по једну свеску и бар по једну књигу? (3 поена)

Решење

Да бисмо обезбедили да је сваки од четири ђака добио бар по једну оловку, свеску и књигу, даћемо свакоме од њих по један од сваког предмета (по једну свеску, по једну књигу, по једну оловку). Сада нам остаје да им произвољно поделимо две оловке, четири свеске и пет књига. Дакле, треба да им поделимо три класе идентичних предмета.
То можемо учинити на: $\binom{2+4-1}{4-1}\binom{4+4-1}{4-1}\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{5}{3}\binom{7}{3}\binom{8}{3} = 10*35*56 = 19600$ начина.