УВОД У СТАТИСТИКУ час 7

5. април ’17.

Метод момената

- Пример 1

Нека дискретно обележје X има следећи закон расподеле:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & \frac{2(1-\theta)}{3} & \frac{1-\theta}{3} \end{pmatrix},$$

где је $\theta \in [0, 1]$.

Наћи оцену непознатог параметра θ на основу простог случајног узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ обима n из обележја X.

Затим, за реализован узорак $(3, 0, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1)$ израчунати вредност оцене θ.

Решење:

Како постоји само један непознати параметар формира се једна једначина из које се одређује непознати параметар θ:

$$EX = \bar{X}_n.$$

С обзиром на то да је $EX = \frac{7}{3} - 2\theta$, добија се $\boldsymbol{\hat{\theta} = \frac{7}{6} - \frac{\bar{X}_n}{2}}$ као оцена параметра θ.

За наведени реализовани узорак: $\boldsymbol{\hat{\theta} = \frac{5}{12} \approx 0.417}$. $\triangle$

ЛГЛАВАШ

Пример 2

Нека обележје X има $NB(r,p)$ расподелу, где је $r \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$.

Наћи оцену непознатог параметра θ на основу простог случајног узорка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ обима n из обележја X.

Решење:

Постоје два непозната параметра, па се стога формирају две једначине:

$$EX = \bar{X}_n,$$
$$DX = \bar{S}_n^2.$$

С обзиром на то да је $EX = \frac{r}{p}$, а $DX = \frac{r(1-p)}{p^2}$, добија се $\boldsymbol{\hat{r} = \frac{\bar{X}_n^2}{\bar{X}_n + \bar{S}_n^2}}$ као оцена параметра r и $\boldsymbol{\hat{p} = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_n + \bar{S}_n^2}}$ као оцена параметра p. $\triangle$

Специјално, за $X \in G(p)$ оцена непознате вероватноће успеха у Бернулијевом покушају је

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

Пример 3

Нека обележје X има $U(0, \theta)$ расподелу, где је $\theta \in (0, +\infty)$.

Наћи оцену непознатог параметра θ на основу простог случајног узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ обима n из обележја X.

Решење:

Формира се већ позната једначина из које се одређује (једини) непознати параметар θ:

$$EX = \bar{X}_n.$$

С обзиром на то да је $EX = \frac{\theta}{2}$, добија се $\boldsymbol{\hat{\theta} = 2\bar{X}_n}$ као оцена параметра θ. Може се показати да је ова оцена непристрасна. △

Пример 4

Нека обележје X има густину расподеле $f_X(x;\theta)$ дату са
$$f_X(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, x \in (0,1),$$
где је $\theta \in (0,+\infty)$.

Наћи оцену непознатог параметра θ на основу простог случајног узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ обима n из обележја X.

Затим, за реализован узорак $(0.42, 0.10, 0.65, 0.23)$ израчунати вредност оцене θ.

Решење:

Поново постоји само један непознати параметар. Искористи се иста једначина као у претходном примеру:
$$EX = \bar{X}_n.$$
С обзиром на то да је овде $EX = \frac{\theta}{\theta+1}$, добија се $\boldsymbol{\hat{\theta} = \frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}}$ као оцена параметра θ.

За наведени реализовани узорак: $\boldsymbol{\hat{\theta} \approx 0.538}$. △

ЛГЛАВАШ

Пример 5

Нека обележје X има $\gamma(\alpha,\beta)$, где су $\alpha,\beta \in (0,+\infty)$.

Наћи оцене непознатих параметара α и β на основу простог случајног узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ обима n из обележја X.

Решење:

Сада постоје два непозната параметра, па се формирају две једначине:

$$EX = \bar{X}_n,$$

$$EX^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 =: A_2.$$

С обзиром на то да је $EX = \frac{\alpha}{\beta}$, а $EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$, добија се $\boldsymbol{\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}_n^2}{A_2 - \bar{X}_n^2}}$ као оцена параметра α и $\boldsymbol{\hat{\beta} = \frac{\bar{X}_n}{A_2 - \bar{X}_n^2}}$ као оцена параметра β. △

Пример 5 (примена)

Гама расподела се често користи у метеорологији као вероватносни модел за ниво падавина.

Пример:

Узорак: подаци о падавинама за метеоролошку станицу у округу Douglas, Nebraska, USA, од 1992. до 2017. г. (укупно 300).

Обележје: месечне падавине (у in).

Годишње падавине	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10)$	>10
Апсолутна учестаност f_j	77	73	47	35	24	15	11	7	6	3	2
Оцењена апсолутна учестаност $\hat{f}_j$ (≈) (ако се пп. $\gamma(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$)	71.91	73.49	53.91	36.54	23.86	15.24	9.59	5.97	3.69	2.27	3.53

$$300 \cdot \int_0^1 \frac{x^{\hat{\alpha}-1} e^{-\hat{\beta} x} \hat{\beta}^{\hat{\alpha}}}{\Gamma(\hat{\alpha})} dx$$

На основу реализованог узорка добијају се следеће вредности узорачке средине и узорачког другог момента:

$$\bar{x}_n \approx 2.664$$
$$a_2 \approx 12.081.$$

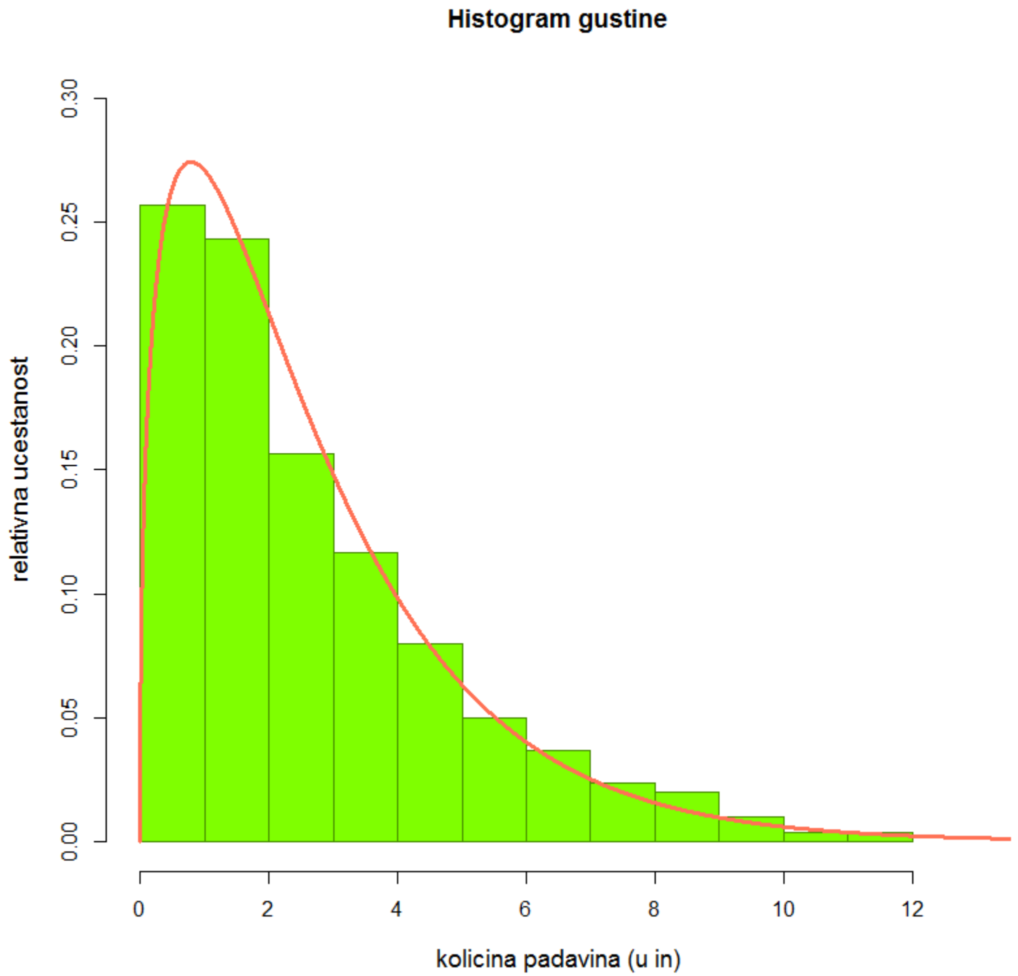
```
The decimal point is at the |

 0 | 00011111111122233333333334444
 0 | 555555555666677777778888888888888999999999999
 1 | 00000001111111111112222233333333334444444
 1 | 5555555555666666666777778888899999
 2 | 00011111222222333444444
 2 | 55555556666777777889999
 3 | 000000112222334
 3 | 55555556677778889999
 4 | 000022223334444
 4 | 666778
 5 | 000001234
 5 | 5568889999
 6 | 011134
 6 | 556699
 7 | 01334
 7 | 9
 8 | 00001
 8 | 77
 9 | 24
 9 | 8
10 | 4
10 |
11 | 0
```

Као што се и види на дијаграму „грана-лишће“ подаци у узорку су очигледно асиметрични удесно, што наговештава да би гама расподела могла бити адекватан модел. Параметри расподеле би у том случају били оцењени са:

$$\hat{\alpha} \approx 1.4239 \text{ и } \hat{\beta} \approx 0.5345.$$

Пример 5 (примена – наставак)

Визуелно слагање података са моделом – слагање хистограма густине и графика густине гама расподеле са оцењеним параметрима



ЛГЛАВАШ