

УВОД У СТАТИСТИКУ час 6

29. март '17.

▶ Пример 1

χ^2 расподела:

$$X \in \gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow Y := 2\beta X \in \chi_{2\alpha}^2$$

Дужина временског периода X (у годинама) до отказа одређеног типа оптичке компоненте има $\gamma(2, 1/3)$ расподелу. Потребно је одредити дужину гарантног периода тако да 90% компоненти разматраног типа не откаже током тог периода.

На основу горње трансформације, уместо са сл. величином $X \in \gamma(2, 1/3)$ може се радити са сл. величином $Y \in \chi_4^2$ и то на следећи начин:

Тражи се вредност m_{10} за коју важи:

$$P\{X \leq m_{10}\} = 0.1$$

(то је уствари 10 –процентни квантил расподеле сл. величине X), што се може свести на тражење вредности m'_{10} која представља 10 –процентни квантил расподеле сл. величине Y .

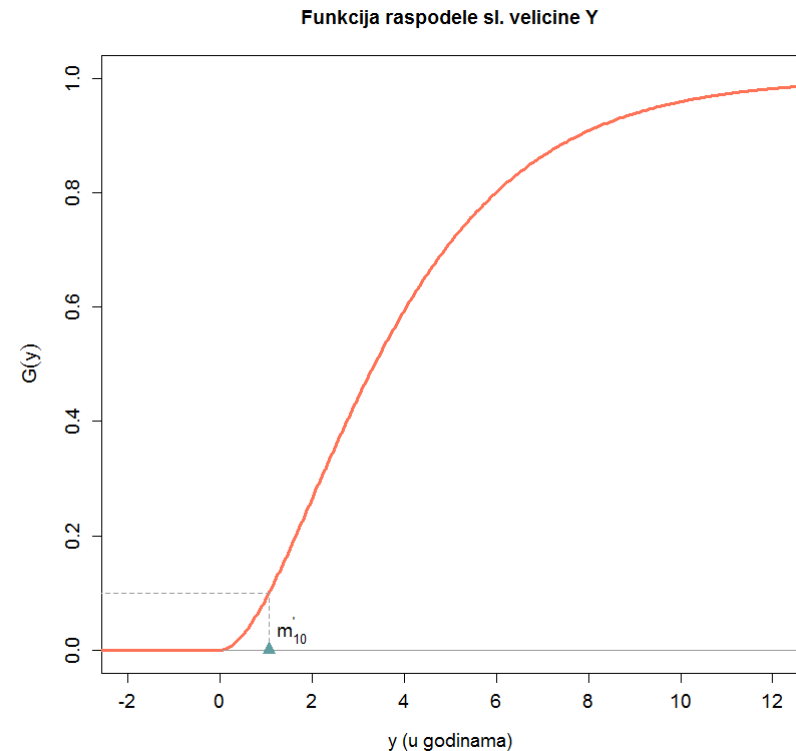
Тада важи

$$m_{10} = \frac{3m'_{10}}{2}.$$

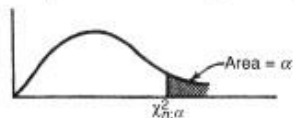
Вредност m'_{10} прочита се нпр. из таблице за χ^2 расподелу.

Решење:

тражена дужина гарантног периода је \approx **1.595 година.**



Value of $\chi_{n,\alpha}^2$ such that $\text{Prob}[\chi_n^2 > \chi_{n,\alpha}^2] = \alpha$



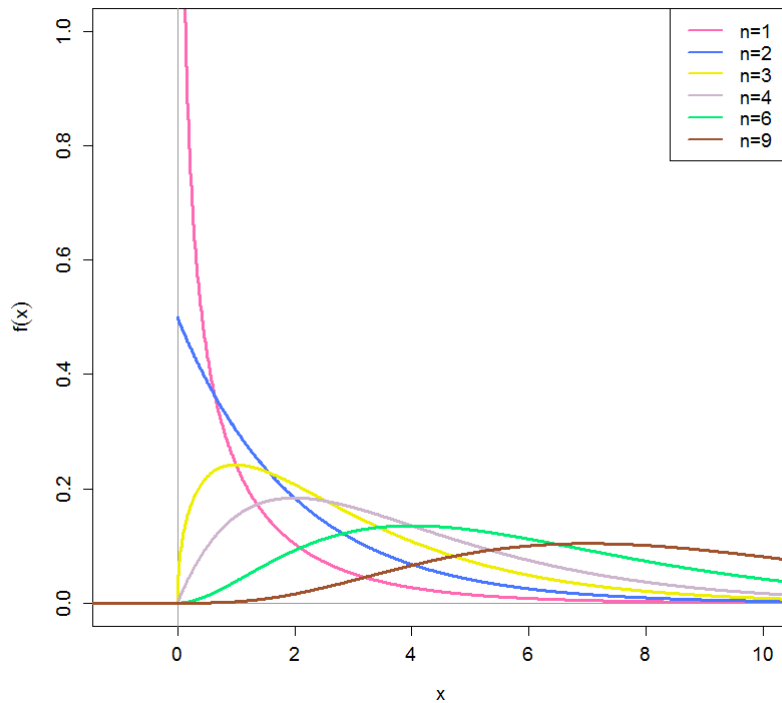
$n \backslash \alpha$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.08	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.88	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.58	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65

▶ Пример 2

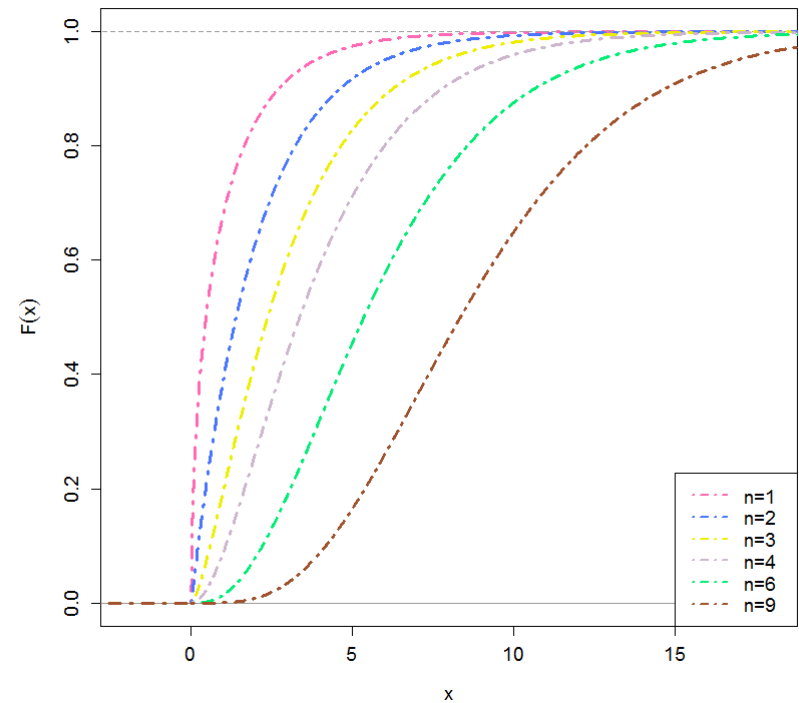
χ^2 расподела:

$$X \in \chi_n^2$$

Gustina raspodele



Funkcija raspodele



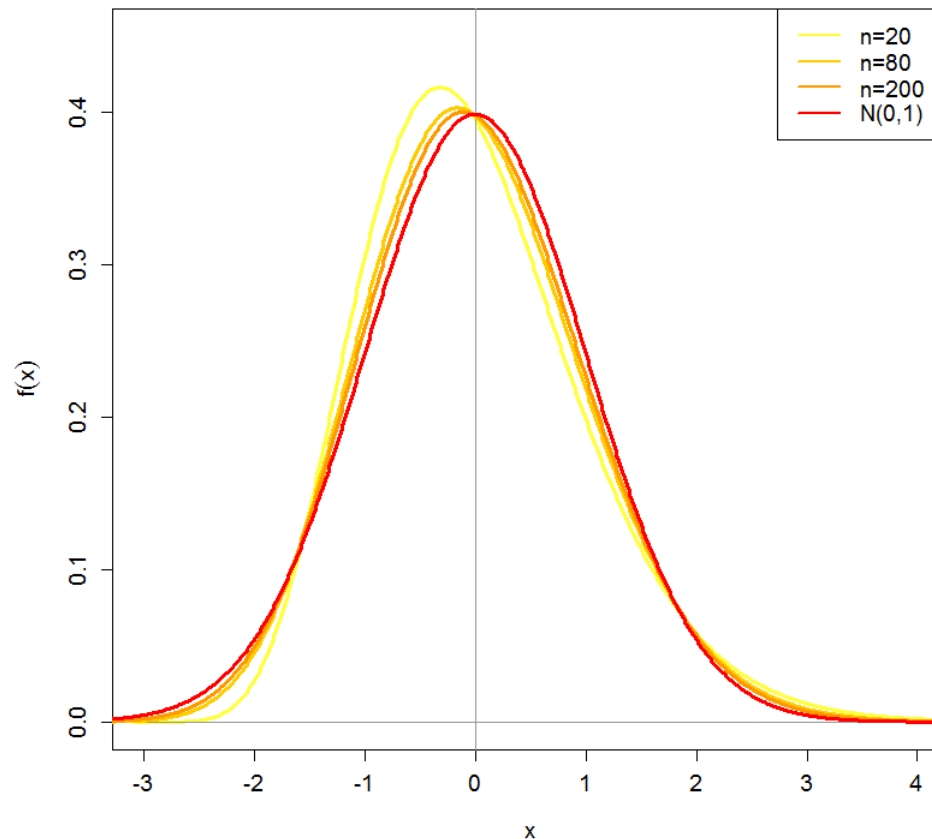
Медијана	$\approx n \left(1 - \frac{2}{9n}\right)^3$
Мода	$\max\{n - 2, 0\}$
Коефицијент варијације	$\sqrt{2/n}$
Коефицијент асиметрије	$\sqrt{8/n}$
Коефицијент спљоштености	$12/n$

▶ Пример 3

Апроксимација стандардизоване χ^2 расподеле стандардном нормалном расподелом:

$$X \in \chi_n^2 \Rightarrow \frac{X - n}{\sqrt{2n}} \sim N(0,1)$$

за довољно велике вредности n .

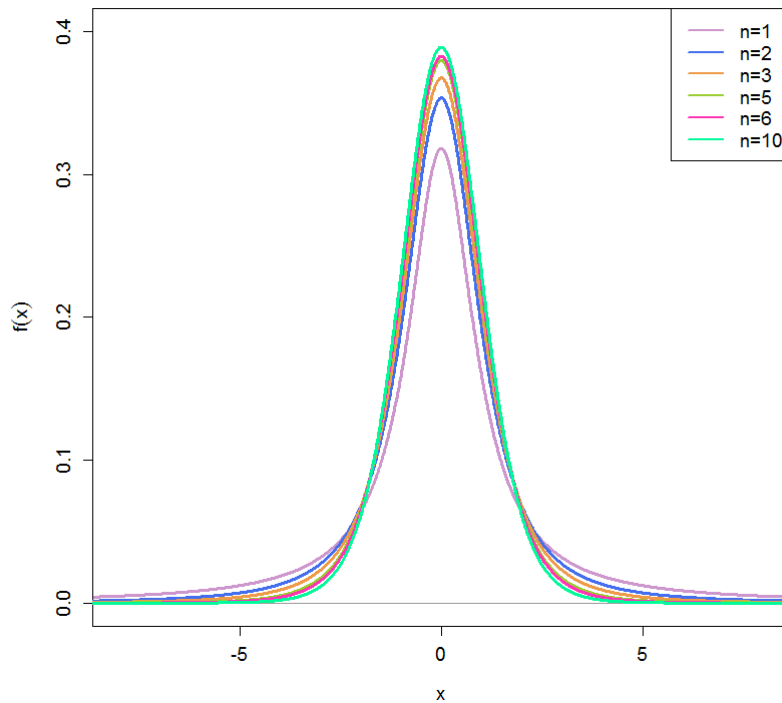


▶ Пример 4

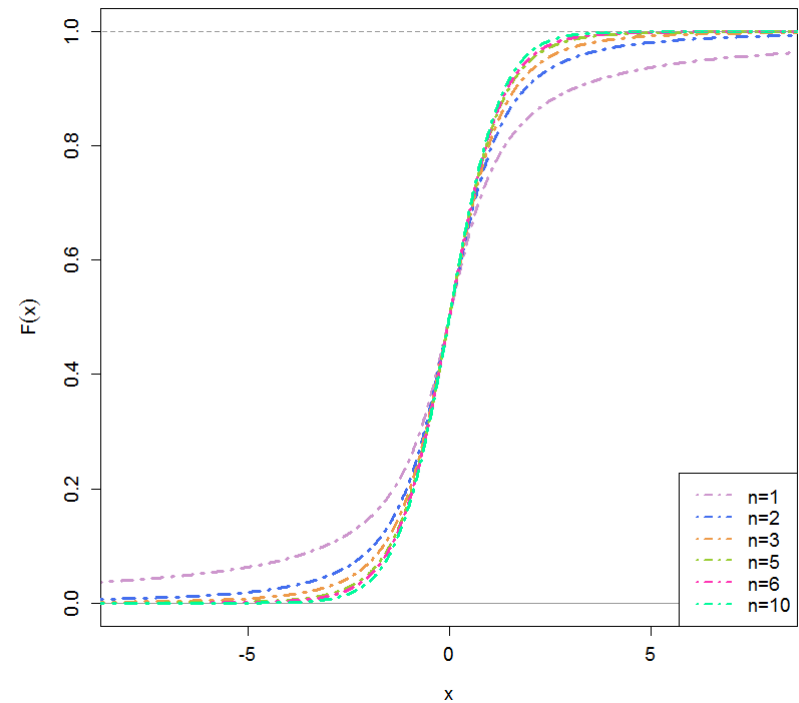
Студентова расподела:

$$X \in t_n$$

Gustina raspodele

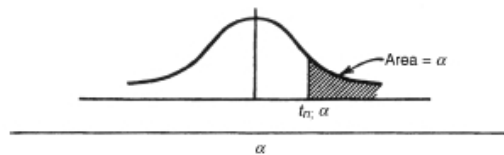


Funkcija raspodele



Медијана, мода	0
Коефицијент асиметрије	0 за $n > 3$
Коефицијент спљоштености	$\frac{6}{n-4}$ за $n > 4$

Value of $t_{n,\alpha}$ such that $\text{Prob}\{t_n > t_{n,\alpha}\} = \alpha$



n	α				
	0.10	0.050	0.025	0.010	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	3.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617

За вредности $\alpha \in \{0.995, 0.990, 0.975, 0.950, 0.900\}$ одговарајући квантили добијају се из једнакости

$$t_{n;1-\alpha} = -t_{n;\alpha}$$

(густина расподеле је симетрична у односу на тачку $x = 0$).

Такође,

$$P\{|t_n| > t_{n;\alpha/2}\} = \alpha.$$

► Пример 5

Апроксимација Студентове расподеле стандардном нормалном расподелом:

$$X \in t_n \Rightarrow X \sim N(0,1)$$

за довољно велике вредности n .

