УВОД У СТАТИСТИКУ час 12

17. мај ’17.

Пример 1

Фабричка опрема за сипање житарица у кутије раније је подешена тако да количина житарица у једној кутији буде нормално расподељена случајна величина са стандардним одступањем једнаким $15\ g$.

На случајан начин одабере се прост случајан узорак обима 25 кутија житарица, како би се установило да ли се променила варијабилност процеса сипања. Добијено поправљено узорачко стандардно одступање је $17.7\ g$.

Шта би требало закључити??

Решење:

Требало би тестирати $H_0(\sigma^2 = 225)$ против $H_1(\sigma^2 \neq 225)$. Нека је праг значајности $\alpha = 0.01$.

Решење: (наставак)

1. начин – одређивање критичне области

Правило одлучивања:

- ако је $(\chi^2_{24;0.995} =)9.886 < \frac{24\tilde{s}^2_{25}}{225} < 45.559(= \chi^2_{24;0.005})$ нема разлога за одбацивање хипотезе H_0
- у супротном, хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1.

Нулта хипотеза се прихвата за $\alpha = 0.01$.

2. начин – одређивање P-вредности

Реализована вредност тест статистике је $\frac{24\tilde{s}^2_{25}}{225} = 33.4176$. Рачуна се њена значајност, односно P-вредност (одређује се читањем из таблица χ^2 расподеле):

$$2 \cdot min\{P\{T \leq 33.4176\}, P\{T \geq 33.4176\}\},$$

$T \in \chi^2_{24}$.

Правило одлучивања:

- ако је P-вредност $< \alpha$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Нулта хипотеза се прихвата за $\alpha = 0.01$.

Решење: (наставак)

3. начин – одређивање интервала поверења

Двострани интервал поверења за σ^2 са нивоом поверења $1-\alpha$ је:

$$I_{1-\alpha} = \left[\frac{24 \cdot \tilde{S}_{25}^2}{\chi^2_{24;0.005}}, \frac{24 \cdot \tilde{S}_{25}^2}{\chi^2_{24;0.995}}\right].$$

Правило одлучивања:

- ако реализовани двострани интервал поверења не садржи вредност 225 хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Овде је $I_{1-\alpha} = [165.0379, 760.5665]$, па се нулта хипотеза прихвата за $\alpha = 0.01$.

Дакле, недовољне су назнаке из узорка да је стандардно одступање количине житарице у кутији (битно) различито од $15\ g$. $\triangle$

Пример 2

(„Вероватноћа и статистика за инжењере и студенте технике“, проф. др Милан Меркле)

Од два типа радара, A и B, радар B је новије технологије и тврди се да је бољи. Како је радар B и скупљи од радара A, купац ће се определити за радар B ако он открива покретни објекат пре радара A у више од 60% случајева.

Изводи се 20 експеримената. Нека је S укупан број случајева када се радар B покаже као бољи од радара A. Нека је p (непозната) вероватноћа да је B бољи од A. Тада $S \in B(20, p)$.

Требало би тестирати $H_0(p \leq 0.6)$ против $H_1(p > 0.6)$. Нека је праг значајности $\alpha = 0.05$.

Решење:

Хипотезу H_0 требало би одбацити ако је реализована вредност s статистике S велика, прецизније ако је $s \geq c$, при чему се критична вредност c бира на основу задатог прага значајности на следећи начин.

Решење: (наставак)

У области $\Theta_0 = \{p|0 < p \leq 0.6\}$ у којој је тачна H_0 важи да је вероватноћа грешке прве врсте (растућа) функција од p дата са:

$$\alpha(p) = P\{S \geq c\} = \sum_{i=c}^{20} \binom{20}{i} p^i (1-p)^{20-i}.$$

Како је S целобројна случајна величина има смисла узети само цео број c, који се бира тако да важи:

$$\sum_{i=c}^{20} \binom{20}{i} p^i (1-p)^{20-i} \leq 0.05, \text{за свако } p \leq 0.6.$$

Сума са леве стране горње неједнакости достиже максимум за $p = 0.6$, па би c требало изабрати тако да је:

$$\sum_{i=c}^{20} \binom{20}{i} (0.6)^i (0.4)^{20-i} \leq 0.05.$$

Пробањем за разне вредности c налази се да је најмање c за које је ова неједнакост испуњена $c = 17$, при чему је $\alpha(0.6) = 0.01596$ и та вредност је величина критичне области.

Правило одлучивања:

- ако је $s \geq 17$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

У области $\Theta_1 = \{p|0.6 < p < 1\}$ у којој је тачна H_1 важи да је вероватноћа грешке друге врсте (опадајућа) функција од p дата са:

$$\beta(p) = P\{S < 17\} = \sum_{i=0}^{16} \binom{20}{i} p^i (1-p)^{20-i}, \text{за } p > 0.6.$$

Супремум ове вероватноће је вредност која се добија за $p = 0.6$ и износи 0.98404. △

Пример 3

На узорку обима 19 особа старијег доба тестира се експериментални лек за ублажавање болова проузрокованих артритисом.

Познато је да је стандардна терапија делотворна у 85% случајева. Ако је са p означена (непозната) вероватноћа да ће нови лек умањити бол код пацијента, требало би тестирати $H_0(p = 0.85)$ против $H_1(p \neq 0.85)$. Како би гласило правило одлучивања за праг значајности $\alpha = 0.1$??

Решење:

Нека је S укупан број пацијената којима је експериментални лек ублажио болове. Тада $S \in B(19, p)$. Одређује се двострана критична област, тако да вероватноће које одговарају двема странама те области буду приближно једнаке по $\frac{\alpha}{2}$.

Испоставља се да би хипотезу H_0 требало одбацити ако је реализована вредност s сл. величине S значајно већа, односно значајно мања, од вредности 16.15, која представља мат. очекивање сл. величине S при тачној нултој хипотези.

Решење: (наставак)

Од помоћи је следећа таблица са вредностима вероватноћа из закона расподеле биномне $B(19, 0.85)$ расподеле (ову расподелу има сл. величина S при тачној H_0):

s	$P\{S = s\}$
$0 \leq s \leq 6$	0
7	0.000002
8	0.000018
9	0.000123
10	0.000699
11	0.003242
12	0.012246
13	0.037366
14	0.090746
15	0.171409
16	0.242829
17	0.242829
18	0.152892
19	**0.045599**

$\boldsymbol{P\{S \leq 13\} \approx 0.053696}$

Правило одлучивања:

- ако је $s \leq 13$ или $s = 19$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Заиста:

$$P\{S \leq 13 \ \vee S = 19 \mid H_0\} = P\{S \leq 13 \mid p = 0.85\} + P\{S = 19 \mid p = 0.85\}$$
$$\approx 0.05369611 + 0.04559945 = 0.09929556. \ \triangle$$

Пример 4

Произвођач компјутерских чипова тврди да је највише 2% од укупног броја чипова које произведе неисправно. Ова тврдња привукла је пажњу извесне електронске компаније, која је затим купила велику количину чипова. Желећи да испита да ли се може веровати произвођачу управа компаније одлучила је да испита узорак од 300 случајно одабраних чипова. Ако је 10 чипова из узорка неисправно, да ли то оспорава тврдњу произвођача??

Решење:

Тврдња ће бити тестирана за праг значајности $\alpha = 0.05$. Нека је S укупан број неисправних чипова. Тада $S \in B(300, p)$, при чему је параметар p непознат.

Реализована вредност статистике S је $s = 10$. Тестирање ће бити спроведено рачунањем P-вредности за s:

максимум се достиже за $p = 0.02$

$$\sup_{p_0 \in \Theta_0} P\{S \geq 10 | H_0\} = \sup_{p_0 \in \Theta_0} (1 - P\{S \leq 9 \mid p = p_0\}) \approx 0.08184$$

па за праг значајности $\alpha = 0.05$ нема основа за одбацивање H_0.

Решење: (наставак)

Овде је, међутим, обим узорка велики, па се може користити и апроксимација нормалном расподелом (на основу важења ЦГТ), чиме се добија апроксимативна P-вредност.

Рачуна се вероватноћа:

$$P\{S \geq 10 | p = 0.02\} = P\{S \geq 9.5 | p = 0.02\} =$$
$$= P\left\{\frac{S - 300 \cdot 0.02}{\sqrt{300 \cdot 0.02 \cdot (1 - 0.02)}} \geq \frac{9.5 - 300 \cdot 0.02}{\sqrt{300 \cdot 0.02 \cdot 0.98}} \middle| p = 0.02\right\}$$
$$\approx P\left\{Z \geq \frac{9.5 - 6}{\sqrt{5.88}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{3.5}{\sqrt{5.88}}\right),$$

где $Z \in N(0,1)$, па је тражена апроксимативна P-вредност за s једнака приближно 0.07446. И на основу апроксимативног теста, за праг значајности $\alpha = 0.05$, нема основа за одбацивање H_0. $\triangle$

Пример 5

Предложена су два нова метода за производњу аутомобилских гума. Да би утврдио да ли је неки од њих бољи од другог, произвођач пнеуматика је на случајан начин изабрао узорак обима 10 гума произведених коришћењем првог метода и узорак обима 8 гума произведених другим методом. Тестирање гума подразумева испробавање њихових карактеристика на путу, па се први узорак тестира на локацији A, а други на локацији B.

На основу претходних искустава познато је да је трајност ауто гуме (у пређеним километрима) тестиране на некој од ових локација нормално расподељена сл. величина са мат. очекивањем које зависи од саме гуме и дисперзијом која (у највећој мери) зависи од локације пута којим се вози. Прецизније, стандардно одступање трајности гума тестираних на локацији A једнако је $4000\ km$, а оних које су тестиране на локацији B $6000\ km$.

Произвођач жели да тестира хипотезу да нема приметне разлике у просечној трајности гума произведених поменутим методима. Шта би требало закључити за праг значајности $\alpha = 0.05$, ако су узорачки подаци о трајности гуме (у јединици $100\ km$) дати у следећој табели??

Гуме тестиране на локацији A	Гуме тестиране на локацији B
61.1	62.2
58.2	56.6
62.3	66.4
64.0	56.2
59.7	57.4
66.2	58.4
57.8	57.6
61.4	65.4
62.2	
63.6	

Решење:

Тестира се $H_0(m_A = m_B)$ против $H_1(m_A \neq m_B)$, где су m_A, односно m_B, просечне трајности ауто гуме, тестиране на локацији A, односно B.

1. начин – одређивање критичне области

Правило одлучивања:

- ако је $|\bar{x}_{10} - \bar{y}_8| \geq z_{0,95}\sqrt{\frac{40^2}{10} + \frac{60^2}{8}}$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Нулта хипотеза се прихвата за $\alpha = 0.05$.

2. начин – одређивање P-вредности

Реализована вредност тест статистике је $\frac{\bar{x}_{10}-\bar{y}_8}{\sqrt{610}} \approx 0.066$. Рачуна се њена значајност, односно P-вредност:

$$2 \cdot P\{T \geq 0.066\} \approx 0.94738,$$

$T \in N(0,1)$.

Нулта хипотеза се прихвата за $\alpha = 0.05$. △

Пример 6

Чланови ботаничке секције изучавају две врсте биљке перунике – Iris versicolor и Iris virginica.
За експерименталне потребе узорковано је 11 цветова врсте Iris versicolor и 15 цветова врсте Iris virginica.
Са прагом значајности $\alpha = 0.05$ они желе да тестирају хипотезу да су просечне дужине латице цвета (у cm) код ове две врсте једнаке, против алтернативне да је већа дужина латице цвета врсте Iris virginica.

Подаци из узорака су:

```
> uzorak.I.versicolor
 [1] 3.17 4.65 4.17 4.01 4.38 4.93 3.89 3.39 4.69 4.59 4.20
> uzorak.I.virginica
 [1] 5.83 5.05 6.01 5.03 5.72 5.61 6.50 5.85 4.19 5.93 5.47 5.61 5.21 5.31 5.42
```

Решење:

Претпоставља се нормална расподељеност обележја дужина латице. Требало би тестирати $H_0(m_1 = m_2)$ против $H_1(m_1 < m_2)$, где су m_1, m_2, просечне дужине латице цвета перунике врста, редом, Iris versicolor, Iris virginica. Дисперзије обележја од интереса су непознате, али се сматрају једнаким.

НАПОМЕНА: Пре тестирања хипотезе о једнакости мат. очекивања требало би се уверити да су дисперзије ова два независна обележја заиста једнаке, спровођењем одређеног статистичког теста. Излаз функције (статистички пакет R):

```
        F test to compare two variances

data:  uzorak.I.versicolor and uzorak.I.virginica
F = 1.0498, num df = 10, denom df = 14, p-value = 0.909
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.3336041 3.7272410
sample estimates:
ratio of variances 
          1.049806 
```

Правило одлучивања:

- ако је $\frac{\bar{x}_{11}-\bar{y}_{15}}{s_{11,15}\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{15}}} < -1.70814(= -t_{25;0.1})$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1, где је $s_{11,15} = \sqrt{\frac{10\tilde{s}_{11}^2+14\tilde{s}_{15}^2}{24}}$
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Нулту хипотезу би требало одбацити у корист алтернативне за $\alpha = 0.05$.

Излаз функције:

```
        Two Sample t-test

data:  uzorak.I.versicolor and uzorak.I.virginica
t = -6.1846, df = 24, p-value = 1.084e-06
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
      -Inf -0.9604935
sample estimates:
mean of x mean of y 
 4.188182  5.516000 
```