УВОД У СТАТИСТИКУ час 11

10. мај ’17.

Параметарски тестови

- Пример 1

За потребе примена у индустрији ватромета производи се фитиљ (пиротехничко средство за иницирање експлозивних пуњења). Важна карактеристика овог производа је брзина горења.

По одређеним спецификацијама захтева се да просечна брзина горења мора бити $50\ cm/s$. При томе, зна се да је стандардно одступање брзине горења $2\ cm/s$.

Унапред је одређен праг значајности $\alpha = 0.05$ и на простом случајном узорку обима 25 производа одређена узорачка средина брзине горења $51.3\ cm/s$.

Под претпоставком нормалне расподељености обележја од интереса какав се закључак може донети на основу узорка?

Решење:

Обележје од интереса је брзина горења; (непознати) параметар је мат. очекивање m брзине горења.

Нулта хипотеза је $H_0(m = 50\ cm/s)$ и она се тестира против алтернативне хипотезе $H_1(m \neq 50\ cm/s)$, са задатим прагом значајности $\alpha = 0.05$.

Решење: (наставак)

Тест статистика је $T = \bar{X}_{25}$, која при тачној нултој хипотези има нормалну $N(50, 4/25)$ расподелу.

Правило одлучивања:

- ако је $\bar{x}_{25} \in \left(-\infty, 50 - \frac{2 \cdot z_{0.95}}{\sqrt{25}}\right] \cup \left[50 + \frac{2 \cdot z_{0.95}}{\sqrt{25}}, +\infty\right)$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

$(P\{|Z| \leq z_{0.95}\} = 0.95,\ Z \in N(0,1))$

Овде је $\bar{x}_{25} = 51.3\ cm/s$, тако да $\bar{x}_{25} \in (-\infty, 49.216] \cup [50.784, +\infty)$, тј. реализована вредност тест статистике припада критичној области, па би нулту хипотезу требало одбацити (у корист алтернативне) за праг значајности $\alpha = 0.05$. $\triangle$

Пример 2

Рафинерија ради на развоју адитива за гориво ради побољшања искоришћености горива. У склопу пилот студије, 30 аутомобила, у чије је резервоаре додат адитив, послато је на дужу пробну вожњу. Без додатка адитива, зна се да ови аутомобили троше просечно $9.41\, l$ горива на $100km$, са стандардним одступањем $0.9\, l$ горива на $100km$.

Резултати добијени након пробне вожње показују да је узорачка средина потрошње горива са додатком адитива једнака $8.94\, l$ горива на $100km$.

Шта би требало закључити??

Ако је адитив заиста ефикасан а рафинерија заузме став да је смањење потрошње горива чист стицај околности, она ће грешком одбацити потенцијално уносан производ. Са друге стране, ако адитив није ефикасан, али рафинерија протумачи смањење потрошње горива као доказ да адитив заиста има дејство, узалуд ће изгубити време и новац за развој таквог производа.

Решење:

Претпоставља се нормална расподељеност обележја потрошња горива са непознатим мат. очекивањем m. Требало би тестирати $H_0(m = 9.41)$ (адитив није ефикасан) против $H_1(m < 9.41)$ (адитив је ефикасан). Задат је праг значајности $\alpha = 0.05$.

1. начин – одређивање критичне области

Правило одлучивања:

- ако је $\bar{x}_{30} < 9.141$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Нулту хипотезу би требало одбацити (у корист алтернативне, тј. у корист тезе о ефикасности адитива) за $\alpha = 0.05$.

2. начин – одређивање P-вредности

Реализована вредност тест статистике је $\bar{x}_{30} = 8.94$. Рачуна се њена значајност, односно P-вредност (одређује се читањем из таблица стандардне нормалне расподеле):

$$P\{\bar{X}_{30} < 8.94 | H_0\} = P\left\{\frac{\bar{X}_{30} - 9.41}{0.9} \cdot \sqrt{30} < \frac{8.94 - 9.41}{0.9} \cdot \sqrt{30} \middle| H_0\right\} = P\{Z < -2.86\},$$

$Z \in N(0,1)$.

Правило одлучивања:

- ако је P-вредност $< \alpha$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Нулту хипотезу би требало одбацити за $\alpha = 0.05$. △

Пример 2 (наставак)

Вероватноћа грешке друге врсте ако је нпр. тачна вредност непознатог параметра m једнака 9.13:

$$\beta(9.13) \coloneqq P\{\bar{X}_{30} > 9.141 | m = 9.13\}$$
$$= P\left\{\frac{\bar{X}_{30} - 9.13}{0.9} \cdot \sqrt{30} > \frac{9.141 - 9.13}{0.9} \cdot \sqrt{30}\right\}$$
$$= P\{Z > 0.07\} \approx 0.4721,$$

$Z \in N(0,1)$.

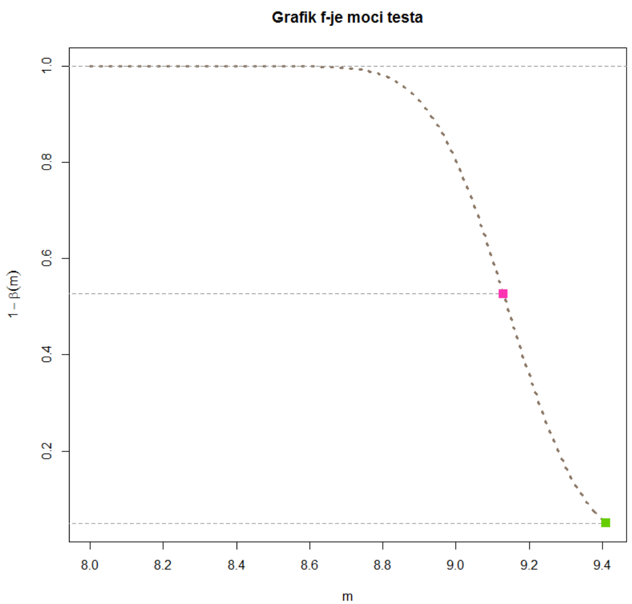
Дакле, правило одлучивања (базирано на одређивању критичне области – 1. начин) биће „преварено“ у приближно 47% случајева, у смислу да H_0 неће бити одбачена.

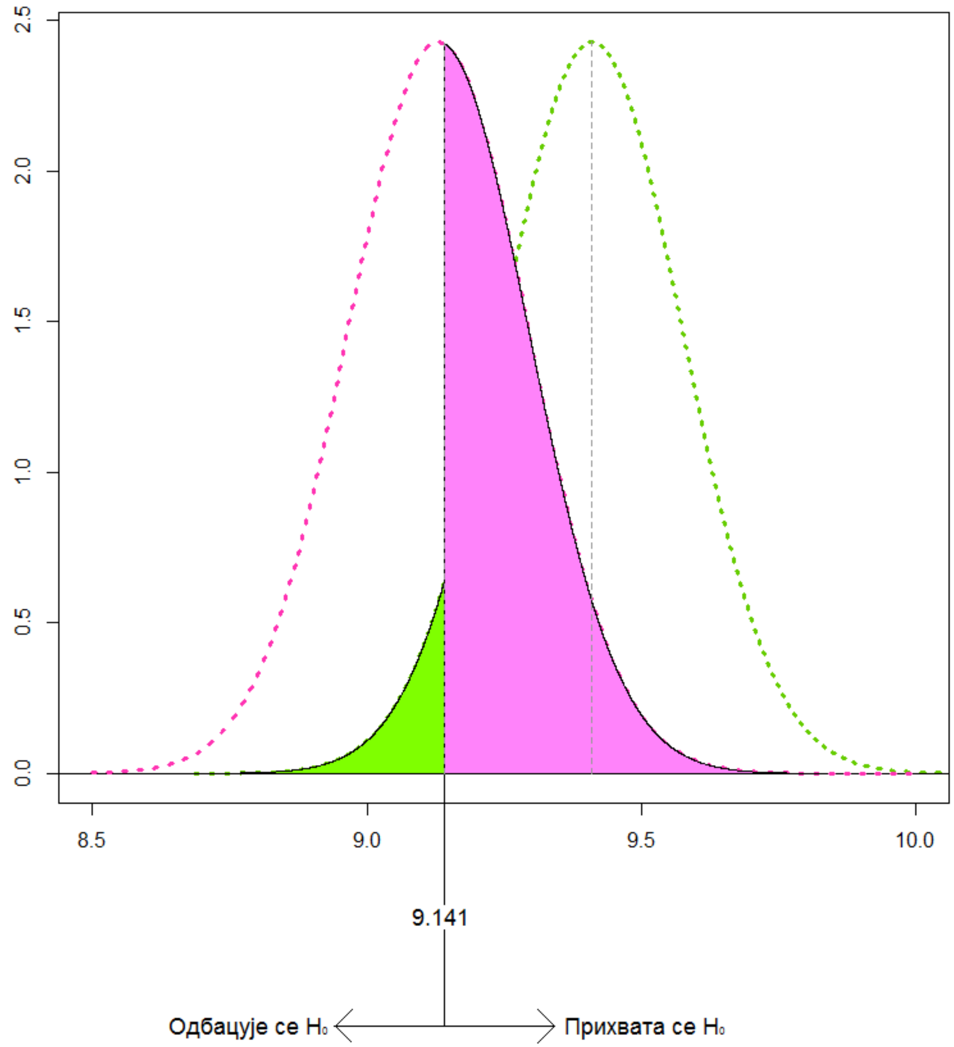
Пример 2 (наставак)

На слици десно приказани су графици густина расподеле тест статистике $T = \bar{X}_{30}$: при тачној хипотези H_0 (зелена линија), односно при тачној хипотези H_1 када је $m = 9.13$ (розе линија).

Површина фигуре обојене зелено је вероватноћа грешке прве врсте − α. Површина фигуре обојене розе је вероватноћа грешке друге врсте − β.

На слици доле приказан је график функције моћи теста (power curve) и назначене су тачке које одговарају моћи теста за: $m = 9.13$ (розе), односно $m = 9.41$ (зелена).





Пример 3

Врши се тестирање хипотезе о мат. очекивању обележја које има нормалну расподелу, при чему је дисперзија позната. На основу простог случајног узорка тестира се нулта хипотеза $H_0(m = m_0)$ против двостране алтернативне $H_1(m \neq m_0)$ са прагом значајности α. Задатак је одредити обим узорка n тако да вероватноћа прихватања хипотезе H_0 у ситуацији када је права вредност непознатог мат. очекивања једнака m_1 буде приближно β, где је $\beta \in (0, 0.5)$ задато.

Решење:

Уствари треба одредити n тако да за вредност вероватноће грешке друге врсте $\beta(m_1)$ важи:

$$\beta(m_1) \approx \beta.$$

Прво се одређује функција $\beta(m)$, као вероватноћа прихватања H_0 ако је права вредност непознатог параметра једнака m:

$$\beta(m) = P\left\{\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{1-\alpha}\right\}.$$

Да би се израчунала ова вероватноћа користи се чињеница да статистика $Z \coloneqq \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ има стандардну нормалну расподелу.

Решење: (наставак)

Даље је:

$$\beta(m) = P\left\{-z_{1-\alpha} - \frac{m}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\bar{X}_n - m - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{1-\alpha} - \frac{m}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$
$$= P\left\{\frac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\alpha} \le Z \le \frac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha}\right\}$$
$$= \Phi\left(\frac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha}\right) - \Phi\left(\frac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\alpha}\right).$$

Према томе, одређује се n тако да важи:

$$\Phi\left(\frac{m_0 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha}\right) - \Phi\left(\frac{m_0 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\alpha}\right) \approx \beta.$$

Решење ове једначине по n не може се добити аналитички, али се може користити следеће расуђивање.

За почетак, претпостави се да је $m_1 > m_0$. Тада је:

$$\frac{m_0 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\alpha} \le -z_{1-\alpha},$$

па, како је ф-ја расподеле Φ стд. нормалне расподеле растућа:

$$\Phi\left(\frac{m_0 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\alpha}\right) \le \Phi(-z_{1-\alpha}) = \alpha/2\,.$$

Решење: (наставак)

Стога се може узети да је:

$$\Phi\left(\frac{m_0 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\alpha}\right) \approx 0,$$

након чега посматрана једначина постаје:

$$\beta \approx \Phi\left(\frac{m_0 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha}\right),$$

или, с обзиром да је $\beta = \Phi\left(-z_{1-2\beta}\right)$:

$$-z_{1-2\beta} \approx \frac{m_0 - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha},$$

па се тражено n може добити по формули:

$$n \approx \frac{\left(z_{1-2\beta} + z_{1-\alpha}\right)^2 \sigma^2}{(m_1 - m_0)^2}.$$

До исте апроксимативне формуле за n долази се и у случају $m_1 < m_0$ (ПОКАЗАТИ!). $\triangle$

Пример 4

Просечан садржај никотина у цигаретама на извесном тржишту износи најмање $1.6\,mg$ по цигарети.

Фирма која се бави производњом цигарета тврди да је открила нову технологију третирања листова дувана, чија би примена смањила просечан садржај никотина по цигарети. Како би ова тврдња била тестирана анализиран је узорак од 20 цигарета које производи ова фирма и при томе је одређено да је узорачки просечан садржај никотина једнак 1.54.

Ако је познато да је стандардно одступање садржаја никотина $0.8\,mg$ по цигарети, шта би требало закључити, при прагу значајности $\alpha = 0.05$??

НАПОМЕНА: Стандардно одступање обележја од интереса заиста може бити познато на основу претходних искустава, јер постоји могућност да варијације у садржају никотина потичу од количине дувана у цигарети, а не од методе третирања листова дувана.

Решење:

Претпоставља се нормална расподељеност обележја садржај дувана са непознатим мат. очекивањем m. Требало би тестирати $H_0(m \geq 1.6)$ против $H_1(m < 1.6)$ за задати праг значајности $\alpha = 0.05$.

Реализована вредност тест статистике је $\bar{x}_{20} = 1.54$. Тестирање ће бити извршено рачунањем њене P-вредности:

$m \in \Theta_0$ је права вредност непознатог параметра

$$P\{\bar{X}_{20} < 1.54 | H_0\} = P\left\{\frac{\bar{X}_{20} - m}{0.8} \cdot \sqrt{20} < \frac{1.54 - m}{0.8} \cdot \sqrt{20} \middle| H_0\right\} = P\left\{Z < \frac{1.54 - m}{0.8} \cdot \sqrt{20}\right\},$$

$Z \in N(0,1)$.

За област $\Theta_0 = \{m | m \geq 1.6\}$ супремум горње вероватноће добија се за $m = 1.6$ и износи $P\{Z < -0.3354\} \approx 0.3687$. Ово је P-вредност реализоване тест статистике.

Нема разлога за одбацивање нулте хипотезе.

Другим речима, назнаке које је пружио узорак, иако подржавају тврдњу прозвођача цигарета, нису довољно јаке да ту тврдњу и докажу. △

Пример 5

Доступност нових материјала омогућила је револуцију у дизајну и производњи голф штапова.

Као квантитативна мера одређеног ефекта (“spring-like effect”) који се манифестује при ударцу голф штапом користи се коефицијент реституције.

Спровођењем одређене експерименталне процедуре, добијене су вредности коефицијента реституције на узорку обима 15 штапова:

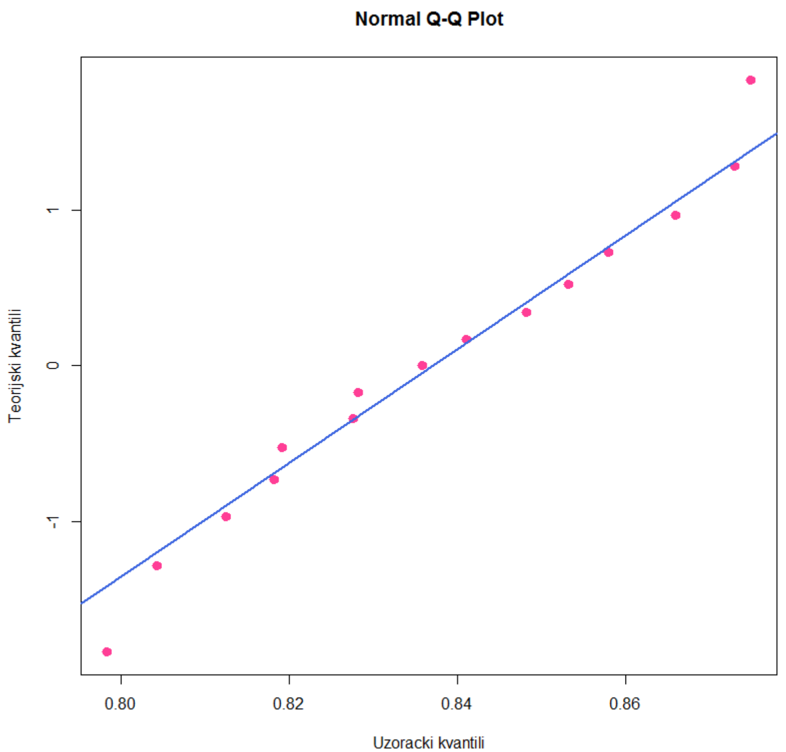
```
[1] 0.8411 0.8191 0.8182 0.8125 0.8750 0.8580 0.8532 0.8483 0.8276 0.7983 0.8042 0.8730 0.8282 0.8359 0.8660
```

Задатак је установити да ли (за праг значајности $\alpha = 0.05$) назнаке из узорка доказују тврдњу да је просечна вредност коефицијента реституције већа од 0.82.

Решење:

Реализоване вредности дескриптивних статистика:

$\bar{x}_n$	m_e	$\tilde{s}_n$	min	max	q_1	q_3
0.83724	0.8359	0.02456	0.7983	0.8750	0.8187	0.8556



Q-Q график десно не даје основа за веровање да би претпоставка о нормалној расподели обележја од интереса била погрешна.

Требало би тестирати $H_0(m = 0.82)$ против $H_1(m > 0.82)$. Задат је праг значајности $\alpha = 0.05$.

Тест статистика је $T = \frac{\bar{X}_{15} - 0.82}{\tilde{S}_{15}/\sqrt{15}}$, која при тачној нултој хипотези има има Студентову t_{14} расподелу.

1. начин – одређивање критичне области

Правило одлучивања:

- ако за реализовану вредност t тест статистике T важи: $t > 1.76131 (= t_{14;0.1})$ хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1 $\left(P\{|X| \geq t_{n;\alpha}\} = \alpha,\ X \in t_n\right)$
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Овде је $t \approx 2.72$, па би нулту хипотезу требало одбацити за $\alpha = 0.05$.

Решење: (наставак)

2. начин – одређивање интервала поверења

На основу формулисаних хипотеза види се да се у индексном скупу Θ могу уочити два подскупа: $\Theta_0 = \{0.82\}$ и $\Theta_1 = (0.82, +\infty)$. Једнострани доњи интервал поверења за m са нивоом поверења $1 - \alpha$ је:

$$I_{1-\alpha} = \left[\bar{X}_{15} - \frac{t_{14;0.1} \cdot \tilde{S}_{15}}{\sqrt{15}}, +\infty\right).$$

Правило одлучивања:

- ако је реализовани једнострани доњи интервал поверења дисјунктан са Θ_0 хипотеза H_0 се одбацује у корист H_1
- у супротном, хипотеза H_0 се не одбацује.

Овде је $I_{1-\alpha} = [0.82607, +\infty)$, па би нулту хипотезу требало одбацити за $\alpha = 0.05$.

Излаз функције која врши статистичко тестирање (статистички пакет R):

```
        One Sample t-test

data:  uzorak
t = 2.719, df = 14, p-value = 0.008313
alternative hypothesis: true mean is greater than 0.82
95 percent confidence interval:
 0.8260722       Inf
sample estimates:
mean of x
  0.83724
```

△