

ТЕОРИЈА УЗОРАКА час 5

2. април '14.

(ПРОСТ) СЛУЧАЈАН УЗОРАК (*Simple Random Sampling*)

БЕЗ ПОНАВЉАЊА (*WithOut Replacement*)

- Ово је један од најједноставнијих и најстаријих метода бирања узорка обима n из популације која садржи N јединица.
- Нека је Ω колекција свих 2^N подскупова од S .

$$P(s) = \begin{cases} \binom{N}{n}^{-1}, & \text{ако је } n(s) = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

је *simple random sampling design*. Овде се сваки од $\binom{N}{n}$ могућих скупова обима n са подједнаком вероватноћом може одабрати као узорак.

- Поменути дизајн може се у пракси имплементирати следећим поступком извлачења јединица из популације:
Одабрати n случајних бројева између 1 и N без понављања. Јединице популације које кореспондирају изабраним бројевима чине узорак.
Коришћење таблица случајних цифара или (псеудо) случајних бројева омогућава добијање узорка жељеног обима n .
Сваки овакав узорак је комбинација без понављања n -те класе.

- Код СУ без понављања вероватноће укључења првог и другог реда једнаке су:

$$\pi_i = \frac{n}{N} \quad \pi_{ij} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

- Оцена тотала:

Непристрасна оцена тотала обележја популације

је $\hat{Y}_{srs} = \frac{N}{n} \sum_{i \in s} Y_i$, њена дисперзија је

$$V[\hat{Y}_{srs}] = \frac{N^2(N-n)}{Nn} S_y^2, \text{ где је } S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [Y_i - \bar{Y}]^2.$$

- Непристрасна оцена $V[\hat{Y}_{srs}]$ је $v[\hat{Y}_{srs}] = \frac{N^2(N-n)}{Nn} s_y^2$ где је s_y^2 узорачки аналогон за S_y^2 .

- Оцена средине:

Ако је $\hat{Y} = \frac{\hat{Y}_{srs}}{N}$ онда је \hat{Y} непристрасна оцена средине обележја популације, а њена дисперзија је $\frac{N-n}{Nn} S_y^2$; оцена дисперзије је $\frac{N-n}{Nn} s_y^2$.

- Узорачка средина: $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$

- Коригована узорачка дисперзија: $s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$

Фракција узорка је количник $\frac{n}{N}$ и означава се са f .

Количник $\frac{N-n}{N}$ је фактор корекције због коначности популације.

У пракси, корекција коначне популације се занемарује ако фракција популације не прелази 5%, а у многим случајевима и када је до 10%.

- Оцена пропорције (*attribute proportion estimation*):

Претпостави се да је истраживач заинтересован за неко квалитативно својство јединица посматране популације.

Популацијска пропорција p (*population proportion*) је удео јединица популације које припадају одређеном нивоу категоричке променљиве од интереса.

Са статистичког становишта циљ је оценити параметар p .

Индикатор функција: $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } i \text{ – та јединица припада нивоу} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Непристрасна оцена популацијске пропорције је

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \text{ а њена дисперзија је } V[\hat{p}] = \frac{N-n}{Nn} S_y^2,$$

где је $S_y^2 = \frac{N}{N-1} \cdot p(1-p)$.

Непристрасна оцена $V[\hat{p}]$ је $v[\hat{p}] = \frac{N-n}{N(n-1)} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})$

ИНТЕРВАЛИ ПОВЕРЕЊА

(*Confidence Intervals*)

- Када се одабере узорак и на основу њега оцене параметри, пожељно је проценити тачност те оцене. Код метода тачкастог оцењивања није позната величина грешке која се прави, нити вероватноћа са којом се може тврдити да је оцењена вредност параметра (тј. реализована вредност одговарајуће статистике – оцене) блиска његовој правој вредности. Стога се процена тачности обично постиже налажењем интервала поверења у оквиру којих се са довољно великом сигурношћу налазе популацијске вредности тотала или средине обележја, или, еквивалентно, одређивањем граница могућих грешака (интервално оцењивање).

- Код СУ без понављања:

- $100(1 - \alpha)\%$ интервал поверења за тотал обележја популације је

$$\hat{Y}_{srs} \pm t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{N(N-n)}{n} s_y^2}$$

- $100(1 - \alpha)\%$ интервал поверења за средину обележја популације је

$$\hat{Y} \pm t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{N-n}{Nn} s_y^2}$$

$t_{n-1; \frac{\alpha}{2}}$ је вредност из таблица за Студентову расподелу са $n-1$ степени слободе, тако да $P\left\{|t_n| \leq t_{n-1; \frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$

- Ако је обим узорка већи од 30, вредност $t_{n-1; \frac{\alpha}{2}}$ чита се из таблица за стандардну нормалну расподелу.

ВЕЛИЧИНА УЗОРКА (*Sample Size*)

- Код узорковања најчешће се поставља питање који обим узорка би требало одабрати. Одговор није увек једноставан. Генерално, обим узорка би требало планирати тако да се постигне задата тачност оцене.

- Код СУ без понављања:

- потребна величина узорка за оцену тотала обележја популације је

$$n = \frac{1}{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{N}} \quad n_0 = \frac{N^2 z^2 S_y^2}{d^2}$$

- потребна величина узорка за оцену средине обележја популације је

$$n = \frac{1}{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{N}} \quad n_0 = \frac{z^2 S_y^2}{d^2}$$

где је z вредност из таблица за стандардну нормалну расподелу, таква да је $P\{|Z| \leq z\} = 1 - \alpha$; d је највећа апсолутна грешка која се допушта са нивоом поверења $1 - \alpha$

Требало би приметити да у наведеним формулама за обим узорка фигурише коригована дисперзија s_y^2 , која најчешће није позната. Оцена тог параметра може се добити нпр. на основу претходног узорка мањег обима. Такође, уколико је обим популације N велики, може се узети $n = n_0$.

Поред овог критеријума одређивања оптималног обима ПСУ задавањем апсолутне грешке оцене, постоје и други критеријуми и то:

- задавањем горње границе дисперзије оцене
- задавањем ширине интервала поверења
- задавањем коефицијента варијације
- задавањем релативне грешке оцене
- задавањем трошкова узорковања.

СА ПОНАВЉАЊЕМ (*With Replacement*)

- Разлика у односу на случајан узорак без понављања јесте у томе што се уместо дефинисања узорка као подскупа популације S (тада није дозвољено понављање јединица), узорак дефинише као неуређен избор са враћањем јединица из S (тада узорак неће обавезно садржати различите јединице).

$$P(s) = \begin{cases} \frac{n!}{N^n} \prod_{k \in S} \frac{1}{s_k!}, & \text{ако је } n(s) = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где је s_k број понављања k -те јединице у узорку.

Ако је обим узорка мали у односу на обим популације, значајне разлике између случајног узорка са и без понављања **нема**, јер је вероватноћа понављања било ког елемента мала.

- Дефиниција из статистике:

Нека се у популацији S посматра неко обележје y . Прост случајан узорак обима n за посматрано обележје је n -димензионалан случајан вектор (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , при чему су случајне величине Y_1, Y_2, \dots, Y_n независне и све имају исту расподелу као обележје y .

То практично значи да експерименти који се изводе ради добијања вредности Y_1, Y_2, \dots морају бити међусобно независни и одвијати се под истим условима.

Овако дефинисан ПСУ се из коначне популације може добити случајним избором са враћањем. Ту има смисла говорити о репрезентативном узорку.

- Реализовани узорак представља конкретан низ вредности обележја добијених на јединицама популације, које су изабране у узорак. То је једна конкретна n -торка бројева. Дакле, није унапред познато које вредности обележја ће се наћи у конкретном узорку.

- Код случајног узорка са понављањем вероватноће укључења првог и другог реда једнаке су:

$$\pi_i = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \quad \pi_{ij} = 1 - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n$$

- Оцена средине:

Непристрасна оцена средине обележја популације је, као и код СУ без понављања, узорачка средина. Непристрасна оцена дисперзије ове оцене једнака је количнику (кориговане) узорачке дисперзије и обима узорка n .

Очигледно је да су формуле за дисперзију оцене средине код СУ без и са понављањем приближно исте, када је фракција узорка мала.

- Важни термини:

- стандардна девијација (одступање) је $\sqrt{s_y^2}$
пружа информацију колико су вредности података удаљене (тј. варирају) од своје средње вредности

- стандардна грешка (средње вредности) узорка обима n

је $\sqrt{\frac{s_y^2}{n}}$

- стандардна грешка оцене једнака је квадратном корену оцене дисперзије оцене (непознатог параметра)
у вези је са нивоом значајности резултата; важан је показатељ колико је статистика узорка поуздана оцена параметра

- Алгоритми за узорковање СУ без понављања:

Врши се бирање елемената популације обима N у узорак обима n .

- *Draw by draw procedure for SRSWOR*

Спада у групу *draw by draw* процедура, што значи да се у сваком од n корака процедуре јединица дефинитивно бира у узорак.

Ово је, конкретно, ситуација са извлачењем куглице из кутије (*ball-in-urn method*).

Definition j : Integer;

For $t = 0, 1, \dots, n - 1$ do

одабери јединицу k из популације, са вероватноћом

$$q_k = \begin{cases} \frac{1}{N - t}, & \text{ако } k \text{ још увек није одабрана} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- *Selection-rejection procedure for SRSWOR*

Спада у групу стандардних секвенцијалних (“престани или настави”) процедура, код којих се сукцесивно испитују јединице популације, тако да се узорак изабере, практично, у једном пролазу кроз податке.

Представља најбољи алгоритам за избор СУ без понављања.

Definition k, j : Integer;

$j = 0$;

For $k = 1, 2, \dots, N$ do

одабери јединицу k из популације, са вероватноћом

$\frac{n - j}{N - (k - 1)}$ и ако је она одабрана $j = j + 1$

- *Reservoir method for SRSWOR*

- *Random sort procedure for SRSWOR*

- Алгоритми за узорковање СУ са понављањем:

Врши се бирање елемената популације обима N у узорак обима n .

- *Draw by draw procedure for SRSWR*

Definition j : Integer;

For $j = 1, 2, \dots, n$ do

одабери јединицу из популације, са вероватноћом $\frac{1}{N}$

- *Sequential procedure for SRSWR*

Definition k, j : Integer;

$j = 0$;

For $k = 1, 2, \dots, N$ do

одабери јединицу k тачно s_k пута,

у складу са биномном расподелом $B\left(n - \sum_{i=1}^{k-1} s_i, \frac{1}{N - k + 1}\right)$

- Функција `sample()`

`sample(x, size, replace=F, prob=NULL)`

Ова функција може да “промеша” (пермутује) елементе вектора, на случајан начин, не мењајући, при томе, њихове стварне вредности. То је врло корисно јер омогућава постизање насумичности (тј. рандомизацију) у експерименталном дизајну, у поступку симулирања и сл.

```
> y <- c(8, 3, 5, 7, 6, 6, 8, 9, 2, 3, 9, 4, 10, 4, 11)
> sample(y) #kao izlaz dobija se jedna permutacija elemenata vektora y
[1] 7 3 3 8 6 5 9 9 6 11 4 10 4 8 2
> sample(y)
[1] 11 8 7 10 4 9 8 9 3 2 4 6 5 3 6
```

Као опционални, други аргумент може се задати величина узорка, који ће се састојати од, на случајан начин, одабраних елемената вектора, без њиховог понављања.

```
> sample(y, 5) #SU bez ponavljanja
[1] 8 2 10 9 7
> sample(y, 5)
[1] 8 8 4 3 6
```

Додавање аргумента `replace=T` омогућава узорковање са понављањем.

```
> sample(y, replace=T) #dobija se novi vektor iste duzine kao y, s tim sto su
neke vrednosti iz vektora y na slucajan nacin izostavljene, a neke druge, opet,
slucajno ponovljene vise puta
[1] 4 9 9 11 9 8 8 10 3 4 6 8 6 4 5
> sample(y, 5, replace=T) #SU sa ponavljanjem
[1] 6 4 2 9 4
```

- (Псеудо) случајни бројеви

То су бројеви из интервала $(0, 1)$ који се рачунају по одређеној формули и имају (скоро) сва својства случајних бројева.

Примена (псеудо) случајних бројева за добијање узорка са или без понављања своди се на то да се од (псеудо) случајног броја $\gamma \in (0, 1)$ добије природан број m из скупа бројева $\{1, 2, \dots, N\}$ (то је, уствари, скуп ознака јединица у популацији). То се остварује помоћу формуле:

$$m = [N \cdot \gamma] + 1$$

где је $[\cdot]$ цео део броја.

- Пример функције за избор СУ обима n из популације обима N , без понављања:

```
> select.reject_srs <- function(N, n)
+ {
+   j <- 0
+   pomocni <- runif(N)
+   uzorak <- NULL
+   for(k in 1:N)
+   {
+     p <- (n-j)/(N-(k-1))
+     if(pomocni[k] < p)
+     {
+       uzorak <- c(uzorak, k)
+       j <- j+1
+     }
+     if(j == n) break
+   }
+   return(uzorak)
+ }
> select.reject_srs(74, 20)
[1] 1 2 4 8 15 23 26 27 36 38 41 42 43 44 49 52 56 61 68 71
```

- Генерисање (псеудо) случајног броја из биномне расподеле са задатим параметрима:

```
> sl.br.iz_Bin <- function(n, p) #funkcija generise jedan (pseudo) slucajan broj iz
B(n, p) raspodele
+ {
+   sl_br <- 0
+   pomocni <- runif(n)
+   sl_br <- sum(pomocni < p)
+   return(sl_br)
+ }
```

```

> rbinom(1, 10, .4)
[1] 7
> sl.br.iz_Bin(10, .4)
[1] 4
> sl.br.iz_Bin(10, .4)
[1] 3

```

Или:

```

> sl.br.iz_Bin_2 <- function(n, p)
+ {
+   sl_br <- 0
+   pomocni <- runif(1)
+   sl_br <- which(pomocni < pbinom(0:n, n, p))[1]-1
+   return(sl_br)
+ }
> sl.br.iz_Bin_2(10, .4)
[1] 3
> sl.br.iz_Bin_2(10, .4)
[1] 4

```

- Пример функције за избор СУ обима n из популације обима N , са понављањем:

```

> sequent_srs <- function(N, n)
+ {
+   j <- 0
+   uzorak <- NULL
+   for(k in 1:N)
+   {
+     s_k <- sl.br.iz_Bin(n-j, 1/(N-k+1))
+     if(s_k > 0) uzorak <- c(uzorak, rep(k, s_k))
+     j <- j+s_k
+     if(j >= n) break
+   }
+   return(uzorak)
+ }
> sequent_srs(74, 20)
[1] 2 3 7 19 25 25 30 33 34 35 37 47 47 48 50 54 63 66 66 69

```

- Пример - рекреативни риболов

За потребе управљања важно је проценити укупан улов који се оствари при рекреативном риболову. Нажалост, не постоји централни регистар за риболов, па се зато често користе баш анкете како би се добила ова процена.

Два уобичајена експериментална дизајна која се користе код овог типа истраживања јесу:

- анкета на приступној тачки (*access survey*) (претпоставља се да рибари излазе чамцима у риболов – приступна тачка је тада марина из које испловљавају и у коју се враћају, после завршеног риболова; истраживач је стационаран на том месту)
- “лутајућа” анкета (*roving survey*) (обично се користи када не постоји заједничка приступна тачка; истраживач се тада креће по терену и анкетира рибаре на које наиђе)

Пример се заснива на стварним подацима прикупљеним током једног дана на језеру у Британској Колумбији.

Тамо постоји једна приступна тачка на којој се налазио истраживач; од интереса су били риболовци који излазе чамцима на језеро; истраживач је пребројао 168 чамаца, од чега је узорковано тачно 30. За избор узорка коришћена је табела случајних цифара; по повратку сваког узоркованог чамца на док истраживач је посади поставио неколико питања.

Циљ: оценити укупан број риболоваца и њихов улов; оценити удео чамаца у којима се налазио довољан број чамаца за спасавање за све присутне рибаре и сл.

```
> recr.fishery <- read.table("C:/Users/Lenchy/Desktop/posao_fax/TU/fishery.csv", sep=";", header=T)
> s <- sort(sample(length(recr.fishery[,1]),30))
> uzorak <- recr.fishery[s,]
> uzorak
```

	Anglers	Catch	Suff. Jackets
19	1	1	yes
21	3	1	yes
30	1	2	yes
33	1	2	no
36	3	2	no
45	3	1	yes
50	1	0	no
53	1	0	no
54	1	1	yes
56	1	0	yes
58	2	0	yes
62	1	1	yes
64	2	0	yes
69	1	2	yes
70	3	3	yes
90	1	0	no
93	1	0	yes
101	2	0	yes
103	3	1	yes
114	1	0	yes
117	2	0	yes
122	1	1	yes
127	1	0	yes
134	1	0	yes
139	1	0	no
141	2	0	yes
143	2	1	no
159	1	1	no
160	1	0	yes
165	1	0	yes


```

> mean.Anglers <- mean(uzorak$Anglers) #uzoracka sredina
> sd.Anglers <- sd(uzorak$Anglers) #standardna devijacija
> se.mean.Anglers <- sd.Anglers/sqrt(length(uzorak$Anglers))
> cat("Est Mean Anglers per boat is ", mean.Anglers,
+ ";\\n      sd of Anglers per boat is ", sd.Anglers,
+ ";\\n      se of mean(Anglers per boat) is ", se.mean.Anglers, "\\n\\n")
Est Mean Anglers per boat is 1.533333 ;
      sd of Anglers per boat is 0.7760792 ;
      se of mean(Anglers per boat) is 0.141692

> mean.Catch <- mean(uzorak$Catch) #uzoracka sredina
> sd.Catch <- sd(uzorak$Catch) #standardna devijacija
> se.mean.Catch <- sd.Catch/sqrt(length(uzorak$Catch))
> cat("Est Mean Catch per boat is ", mean.Catch,
+ ";\\n      sd of Catch per boat is ", sd.Catch,
+ ";\\n      se of mean(Catch per boat) is ", se.mean.Catch, "\\n\\n")
Est Mean Catch per boat is 0.6666667 ;
      sd of Catch per boat is 0.8441823 ;
      se of mean(Catch per boat) is 0.1541259

```

Овде су коришћене стандардне функције из R-а и није урачунат фактор корекције због коначности популације. То као последицу има да је стандардна грешка већа него да је исти урачунат, но то је најчешће сасвим прихватљиво.

Евентуално, може се искористити и функција `t.test()` и помоћу ње израчунати стандардна грешка, користећи чињеницу

$$t - statistic = \frac{estimate}{se}$$

```

> t.test.Anglers <- t.test(uzorak$Anglers)
> names(t.test.Anglers)
[1] "statistic" "parameter" "p.value" "conf.int" "estimate" "null.value"
[7] "alternative" "method" "data.name"
> t.test.Anglers$se.mean <- t.test.Anglers$estimate/t.test.Anglers$statistic
> cat("Est Mean Anglers per boat is ", t.test.Anglers$estimate,
+ "; \n se of mean(Anglers per boat) is ", t.test.Anglers$se.mean, "\n\n")
Est Mean Anglers per boat is 1.533333 ;
se of mean(Anglers per boat) is 0.141692

```

Оцена укупног улова и стандардна грешка те оцене добијају се на следећи начин:

```

> TotalBoats <- 168
> cat('*** Total boats arriving today is:', TotalBoats, '\n')
*** Total boats arriving today is: 168
> Total.Catch <- mean.Catch*TotalBoats
> se.Total.Catch <- se.mean.Catch*TotalBoats
> cat("Est Total Catch ", Total.Catch,
+ "; \n se of total(Catch) is ", se.Total.Catch, "\n\n")
Est Total Catch 112 ;
se of total(Catch) is 25.89315

```

Трећа променљива – да ли у броду има довољан број појасева за спасавање је категоричка (тј. фактор).

```

> count.Jackets <- table(uzorak$Suff.Jackets)
> prop.Jackets <- count.Jackets/sum(count.Jackets) #ocena proporcije
> se.prop.Jackets <- sqrt(prop.Jackets*(1-prop.Jackets)/sum(count.Jackets))
> cat('Summary of Suff.Jackets variable',
+ names(count.Jackets), count.Jackets,
+ ';\n with proportions ', prop.Jackets,
+ ';\n and se ', se.prop.Jackets, '\n\n')
Summary of Suff.Jackets variable no yes 8 22 ;
with proportions 0.2666667 0.7333333 ;
and se 0.08073734 0.08073734

```

- **Пакет survey**

То је стандардни пакет за анализу података добијених истраживањем. Први корак у тој анализи требало би да буде “описивање” плана истраживања (*survey design*) R-у. Функција `svydesign()` узима овај опис и придружује га бази података, како би био креиран *survey design object*.

```
> library(survey)
> uzorak$TotalBoats <- 168 #dodata je nova kolona koja cuva obim populacije
> uzorak.design <- svydesign(data=uzorak, ids=~1,
                           variables=~Anglers+Catch+Suff.Jackets, fpc=~TotalBoats)
> print(uzorak.design)
Independent sampling design
svydesign(data = uzorak, ids = ~1, variables = ~Anglers + Catch +
  Suff.Jackets, fpc = ~TotalBoats)
```

У позиву ове функције аргументом `data=uzorak` назначено је у ком објекту су смештени подаци; аргумент `ids=~1` значи да су узорковани појединачни објекти (овде бродови), тј. нема кластера; аргументом `fpc=~TotalBoats` назначено је која променљива у бази података чува обим популације.

Пакет располаже функцијама за оцењивање средине `svymean()`, тотала обележја `svytotat()` и других параметара. Функцијама се прослеђује име променљиве смештене у *survey design object*-у.

```
> (est.means <- svymean(~Anglers+Catch+Suff.Jackets, uzorak.design))
```

	mean	SE
Anglers	1.53333	0.1284
Catch	0.66667	0.1397
Suff.Jacketsno	0.26667	0.0744
Suff.Jacketsyes	0.73333	0.0744

```
> (est.means.ci <- confint(est.means))
```

	2.5 %	97.5 %
Anglers	1.2816361	1.7850305
Catch	0.3928823	0.9404510
Suff.Jacketsno	0.1207956	0.4125377
Suff.Jacketsyes	0.5874623	0.8792044

Аутоматски се урачунава фактор корекције због коначности популације.

```
> (est.total.Jackets <- svytotat(~Suff.Jackets, uzorak.design))
```

	total	SE
Suff.Jacketsno	44.8	12.504
Suff.Jacketsyes	123.2	12.504

Ако се не назначи обим популације потребно је задати вероватноће узорковања (*sampling probabilities*) или тежине узорковања (*sampling weights*).

```

> pw <- 168/30 #sampling weight=1/pi_i=N/n
> uzorak$pw <-pw
> uzorak.design.nofpc <- svydesign(data=uzorak, ids=~1,
                                variables=~Anglers+Catch+Suff.Jackets, weights=~pw)
> uzorak.design.nofpc
Independent Sampling design (with replacement)
svydesign(data = uzorak, ids = ~1, variables = ~Anglers + Catch +
          Suff.Jackets, weights = ~pw)
> (est.means <- svymean(~Anglers+Catch+Suff.Jackets, uzorak.design.nofpc))

```

	mean	SE
Anglers	1.53333	0.1417
Catch	0.66667	0.1541
Suff.Jacketsno	0.26667	0.0821
Suff.Jacketsyes	0.73333	0.0821

У презентацији коришћени:

- књига “Статистика за IV разред усмереног образовања” – Зоран Ивковић, Драган Бањевић, Предраг Перуничкић, Зоран Глишић, и то, први део – методе и шеме узорака (до стр. 160)
- књига “Sampling Methods Exercises and Solutions” – Pascal Ardilly, Yves Tillé
- рад “Catch Rate Estimation for Roving and Access Point Surveys” – Kenneth Pollock, *North American Journal of Fisheries Management*, 1997.