ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Први колоквијум - 28. новембар 2015.

1. **а)** Нека је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ случајних догађаја у простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Доказати: $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right) = 0.$
- Навести конкретан пример простора вероватноћа и низа (A_n), који показује да обрнута импликација не важи.

б) Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних случајних величина дефинисаних на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, при чему случајна величина X_n представља на случајан начин изабран број из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Израчунати вероватноћу догађаја да све случајне величине (осим евентуално коначно много њих) из низа (X_n) узму вредност различиту од 5.

2. **а)** Случајан вектор (X, Y) има густину расподеле f дату са: $f(x, y) = a$, за тачке $(x, y) \in T$, $f(x, y) = 0$, иначе, где је T троугао са теменима $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$. Одредити вредност a, а затим и густину расподеле случајне величине $Z = X - Y$.

б) Права l додирује кружницу пречника један у фиксираној тачки P. Тачка Q се, такође, налази на кружници, и то тако да је PQ пречник. Кроз тачку Q се, затим, насумице повуче права која дату праву l сече у тачки R. Ако је $\measuredangle PQR$ случајна величина са $U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ расподелом, одредити коју расподелу има дужина дужи PR.

3. Случајна величина Z има непрекидну функцију расподеле H.

а) Одредити функцију расподеле случајне величине $H(Z)$.

б) Нека је $a > 0$. Испитати да ли је функција $G := \frac{aH}{a+1-H}$, такође, функција расподеле.

ТЕСТ: Нека је $\Omega = [0, 1]$ јединични интервал и $\mathcal{F}$ колекција свих његових подскупова A таквих да је или A или A^c коначан. Испитати (по дефиницији) да ли је:

- $\mathcal{F}$ алгебра
- $\mathcal{F}$ σ-алгебра

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Први колоквијум - 28. новембар 2015.

1. **а)** Нека је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ случајних догађаја у простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Доказати: $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right) = 0.$
- Навести конкретан пример простора вероватноћа и низа (A_n), који показује да обрнута импликација не важи.

б) Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних случајних величина дефинисаних на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, при чему случајна величина X_n представља на случајан начин изабран број из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Израчунати вероватноћу догађаја да све случајне величине (осим евентуално коначно много њих) из низа (X_n) узму вредност различиту од 5.

2. **а)** Случајан вектор (X, Y) има густину расподеле f дату са: $f(x, y) = a$, за тачке $(x, y) \in T$, $f(x, y) = 0$, иначе, где је T троугао са теменима $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$. Одредити вредност a, а затим и густину расподеле случајне величине $Z = X - Y$.

б) Права l додирује кружницу пречника један у фиксираној тачки P. Тачка Q се, такође, налази на кружници, и то тако да је PQ пречник. Кроз тачку Q се, затим, насумице повуче права која дату праву l сече у тачки R. Ако је $\measuredangle PQR$ случајна величина са $U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ расподелом, одредити коју расподелу има дужина дужи PR.

3. Случајна величина Z има непрекидну функцију расподеле H.

а) Одредити функцију расподеле случајне величине $H(Z)$.

б) Нека је $a > 0$. Испитати да ли је функција $G := \frac{aH}{a+1-H}$, такође, функција расподеле.

ТЕСТ: Нека је $\Omega = [0, 1]$ јединични интервал и $\mathcal{F}$ колекција свих његових подскупова A таквих да је или A или A^c коначан. Испитати (по дефиницији) да ли је:

- $\mathcal{F}$ алгебра
- $\mathcal{F}$ σ-алгебра