

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА Други колоквијум - 13. фебруар 2015.

1. Дводимензиони случајни вектор (X, Y) има густину расподеле вероватноћа f дату са:

$$f(x, y) = \begin{cases} Cy & \text{за } (x, y) \in D \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

где је D област у равни xOy ограничена линијама: $y = x^2$ и $y = 1$.

- а) Одредити C и условну густину случајне величине Y , при услову да је случајна величина X узела вредност x , $x \in \mathbb{R}$.
- б) Израчунати $E(Y|X = 0.5)$. Одредити $E(Y|X)$ и, помоћу тога, математичко очекивање случајне величине Y .
2. Нека је дат низ $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независних случајних величина, при чему $X_n \in U(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Нека је $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ случајних величина дефинисан са $Y_n = \min\{X_n, 1\}$.

- а) Одредити функцију расподеле случајне величине Y_n , $n \in \mathbb{N}$, и скицирати њен график.
- б) Испитати конвергенцију у вероватноћи низа (Y_n) .
- в) Испитати скоро сигурну конвергенцију низа (Y_n) .

3. а) Нека је дат низ $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независних случајних величина, при чему случајна величина Z_n има густину расподеле h_n дату са: $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{n}} e^{-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, где је $c \in (0, 1)$ константа. Испитати да ли за низ (Z_n) важи јаки закон великих бројева.

- б) Нека је дат низ $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независних случајних величина, такав да: $W_n : \begin{pmatrix} -n^{-\alpha} & 0 & n^{-\alpha} \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix}$. Испитати да ли за низ (W_n) важи централна гранична теорема, ако је $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ и $0 < p < \frac{1}{2}$.

4. **ПОПРАВНИ ЗАДАТАК** Нека је $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ догађаја, такав да је $A_n :=$ догађај да једначина $x^2 - r_n x + Q = 0$ има реална решења, где је $r_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, а Q је случајна величина са равномерном расподелом на интервалу $[0, 1]$. Одредити $P(A_n)$ и $P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$.

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА Други колоквијум - 13. фебруар 2015.

1. Дводимензиони случајни вектор (X, Y) има густину расподеле вероватноћа f дату са:

$$f(x, y) = \begin{cases} Cy & \text{за } (x, y) \in D \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

где је D област у равни xOy ограничена линијама: $y = x^2$ и $y = 1$.

- а) Одредити C и условну густину случајне величине Y , при услову да је случајна величина X узела вредност x , $x \in \mathbb{R}$.
- б) Израчунати $E(Y|X = 0.5)$. Одредити $E(Y|X)$ и, помоћу тога, математичко очекивање случајне величине Y .
2. Нека је дат низ $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независних случајних величина, при чему $X_n \in U(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Нека је $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ случајних величина дефинисан са $Y_n = \min\{X_n, 1\}$.

- а) Одредити функцију расподеле случајне величине Y_n , $n \in \mathbb{N}$, и скицирати њен график.
- б) Испитати конвергенцију у вероватноћи низа (Y_n) .
- в) Испитати скоро сигурну конвергенцију низа (Y_n) .

3. а) Нека је дат низ $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независних случајних величина, при чему случајна величина Z_n има густину расподеле h_n дату са: $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{n}} e^{-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, где је $c \in (0, 1)$ константа. Испитати да ли за низ (Z_n) важи јаки закон великих бројева.

- б) Нека је дат низ $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независних случајних величина, такав да: $W_n : \begin{pmatrix} -n^{-\alpha} & 0 & n^{-\alpha} \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix}$. Испитати да ли за низ (W_n) важи централна гранична теорема, ако је $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ и $0 < p < \frac{1}{2}$.

4. **ПОПРАВНИ ЗАДАТАК** Нека је $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ догађаја, такав да је $A_n :=$ догађај да једначина $x^2 - r_n x + Q = 0$ има реална решења, где је $r_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, а Q је случајна величина са равномерном расподелом на интервалу $[0, 1]$. Одредити $P(A_n)$ и $P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$.