ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Први колоквијум - 30. новембар 2014.

1. Нека су $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ два низа догађаја у истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

а) Ако за низ догађаја (A_n) важи:

$$P\left(A_n \cup A_{n+1} \cup \cdots \cup A_{2n}\right) \geq \frac{n-1}{n}, P\left(A_n \cap A_{n+1} \cap \cdots \cap A_{2n}\right) \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N},$$

израчунати $P\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)$ и $P\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)$.

б) Доказати да је $\varliminf_{n\to\infty} A_n \cup \varlimsup_{n\to\infty} B_n \supset \varliminf_{n\to\infty} (A_n \cup B_n)$.

2. Случајан вектор (X, Y) чије су компоненте координате случајно одабране тачке Q равномерно је расподељен на јединичном квадрату (тј. квадрату са теменима $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$).

а) Одредити густину расподеле случајне величине $Z = \dfrac{3Y}{1-Y}$.

б) Израчунати математичко очекивање случајне величине $T = \min\left\{\dfrac{X}{Y}, \dfrac{1}{2}\right\}$

в) Нормале из случајно одабране тачке Q на координатне осе Ox и Oy деле јединични квадрат на четири правоугаоника. Одредити расподелу случајне величине S која представља површину највећег правоугаоника добијеног на овај начин.

3. Нека случајна величина V има стандардну нормалну расподелу и нека је I Бернулијева случајна величина независна од случајне величине V, таква да је $P\{I = 1\} = \dfrac{1}{2} = P\{I = 0\}$. Нека је, даље, случајна величина W дата са:

$$W = \begin{cases} V & \text{ако је } I = 1 \\ -V & \text{ако је } I = 0 \end{cases}.$$

а) Одредити расподелу случајне величине W.

б) Испитати независност V и W.