ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА
Домаћи задатак

1. Случајне величине U, V, W су независне и све имају стандардну нормалну расподелу. Случајна величина Z дефинисана је са $Z = \dfrac{U+VW}{\sqrt{1+W^2}}$.

а) Одредити условно мат. очекивање за Z при услову W.

б) Испитати независност Z и W.

в) Одредити расподелу за Z.

2. а) Навести пример низа $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ случајних величина који показује да из конвергенције у вероватноћи не следи конвергенција низа математичких очекивања.

б) Нека случајне величине $W, W_1, W_2, \dots$ имају коначне прве моменте. Испитати тачност исказа: ако низ (W_n) конвергира у средњем реда 1 ка случајној величини W, онда важи $W_n \xrightarrow{P} W$, при $n \to \infty$.

в) Нека је $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних случајних величина чији општи члан U_n има равномерну $\mathcal{U}[-1,2]$ расподелу. Ако је $V_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} |U_k|}$, израчунати реалан број c такав да је $P\{V_{216} > c\} = 0.7$.

3. а) Нека је $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина, таквих да је $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$. Помоћу овог низа дефинисана су два нова случајна низа (η_n) и (ζ_n) једнакостима: $\eta_n = a + \alpha^n \xi_n$, $\zeta_n = a + n^\alpha \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, где је a фиксиран реалан број. За сваки од нових низова одредити скупове вредности α такве да важи слаби, односно јаки закон великих бројева.

б) Експеримент се састоји у бацању нехомогеног новчића, код кога је вероватноћа исхода "писмо" у једном бацању једнака p, $0 < p < 1$. Нека је Z_n случајна величина која представља кардиналност скупа вредности i, $1 \le i \le n$, таквих да је "писмо" пало у i-том и $(i+1)$-ом бацању. Одредити горњу границу вероватноће $P\left\{\left|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$.