ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Други колоквијум - 3. фебруар 2016.

1. **а)** Случајан вектор (U,V) је апсолутно-непрекидног типа, а са $\Psi(U)$ означено је условно мат. очекивање $E(V|U)$. Расписујући мат. очекивање $E(\Psi(U)g(U))$ показати да је оно једнако $E(Vg(U))$, где је g Борелова функција за коју оба мат. очекивања постоје (као коначни бројеви).

б) Тачка T бира се на случајан начин (тј. има равномерну расподелу) на дијагонали јединичног квадрата, која спаја тачке $(0,0)$ и $(1,1)$. Затим се исрцтава круг са центром у тачки T, који додирује координатне осе. На крају се бира тачка $Z := (X,Y)$ унутар тог круга, при чему случајан вектор (X,Y) има равномерну расподелу. Одредити условно мат. очекивање случајне величине T при услову да је $Z = (0.5, 0.81)$.

2. Нека је дат низ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ независних, једнако расподељених случајних величина са $\gamma(1,\beta)$ расподелом ($\beta > 0$) и нека је $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ случајних величина дефинисан са $Y_n = \left(\frac{X_n}{n^{-\alpha}}\right)^{-1}$, где је $\alpha > 0$. Испитати све четири врсте конвергенција низа (Y_n).

3. **а)** Нека је $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина са густином расподеле вероватноће h датом са $h(z) = |z| - 0.5$, $0.5 < |z| < 1.5$. Нека је са S_n означен парцијалан збир првих n чланова овог низа. Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > \sqrt{n}\}$.

б) Нека је $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина са мат. очекивањем једнаким 0 и дисперзијом $0 < \sigma^2 < +\infty$. Испитати да ли за низ $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи закон великих бројева ако је $W_n = \xi_n + \xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

ПОПРАВНИ ЗАДАТАК: Случајна величина X има Кошијеву расподелу са густином расподеле $g(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$. Одредити функције и густине расподеле случајних величина Y_1 и Y_2 датих са: $Y_1 = \frac{1}{X}$, $Y_2 = \frac{X^2}{1+X^2}$.

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Други колоквијум - 3. фебруар 2016.

1. **а)** Случајан вектор (U,V) је апсолутно-непрекидног типа, а са $\Psi(U)$ означено је условно мат. очекивање $E(V|U)$. Расписујући мат. очекивање $E(\Psi(U)g(U))$ показати да је оно једнако $E(Vg(U))$, где је g Борелова функција за коју оба мат. очекивања постоје (као коначни бројеви).

б) Тачка T бира се на случајан начин (тј. има равномерну расподелу) на дијагонали јединичног квадрата, која спаја тачке $(0,0)$ и $(1,1)$. Затим се исрцтава круг са центром у тачки T, који додирује координатне осе. На крају се бира тачка $Z := (X,Y)$ унутар тог круга, при чему случајан вектор (X,Y) има равномерну расподелу. Одредити условно мат. очекивање случајне величине T при услову да је $Z = (0.5, 0.81)$.

2. Нека је дат низ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ независних, једнако расподељених случајних величина са $\gamma(1,\beta)$ расподелом ($\beta > 0$) и нека је $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ случајних величина дефинисан са $Y_n = \left(\frac{X_n}{n^{-\alpha}}\right)^{-1}$, где је $\alpha > 0$. Испитати све четири врсте конвергенција низа (Y_n).

3. **а)** Нека је $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина са густином расподеле вероватноће h датом са $h(z) = |z| - 0.5$, $0.5 < |z| < 1.5$. Нека је са S_n означен парцијалан збир првих n чланова овог низа. Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > \sqrt{n}\}$.

б) Нека је $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина са мат. очекивањем једнаким 0 и дисперзијом $0 < \sigma^2 < +\infty$. Испитати да ли за низ $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи закон великих бројева ако је $W_n = \xi_n + \xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

ПОПРАВНИ ЗАДАТАК: Случајна величина X има Кошијеву расподелу са густином расподеле $g(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$. Одредити функције и густине расподеле случајних величина Y_1 и Y_2 датих са: $Y_1 = \frac{1}{X}$, $Y_2 = \frac{X^2}{1+X^2}$.