Анализа 2а септембарски рок Л смер 03.09.2013.

1. Дато је пресликавање:

$$d : R^2 \times R^2 \to R \qquad l((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2| & y_1 = y_2, \\ |x_1 - x_2| + e & y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

   (а) Доказати да d задаје метрику на R^2.

   (б) Доказати да је скуп:

$$A_\xi = (-\pi, \pi) \times \{\xi\}$$

   отворен за свако $\xi \in R$.

   (ц) Испитати отвореност скупа:

$$(-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi].$$

   (д) Дати пример фамилије отворених скупова чији је пресек затворен скуп.

2. Дато је пресликавање:

$$f : R^2 \to R \qquad f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\arctan\left(\frac{x}{y}\right)^2 & y \neq 0 \\ ax + b & y = 0. \end{cases}$$

   (а) Одредити константе a и b тако да f буде непрекидно пресликавање.

   (б) Наћи парцијалне изводе пресликавања f у произвољној тачки равни.

   (ц) Испитати диференцијабилност пресликавања f.

3. Наћи највећу и најмању запремину (или показати да се не може одредити) коју може имати квадар чије су стране паралелне координатним равнима, а темена припадају површи:

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1.$$

4.

$$T = \left\{(x,y,z) \in R^3 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y \leq 1,\ z(x+y)^4 \leq (x-y)^4\right\}$$

   (а) Доказати да T има коначну запремину.

   (б) Израчунати запремину T.

5. Ако је функција $f : R^3 \to R$ непрекидна на затвореној лопти $B[0,1] \subset R^3$ и $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = 0$ за сваку област $A \subset B[0,1]$ доказати да је $f(x,y,z) = 0$ на целој лопти $B[0,1]$.

Напомена: ради се тачно један од изборних задатака 1 и 5.