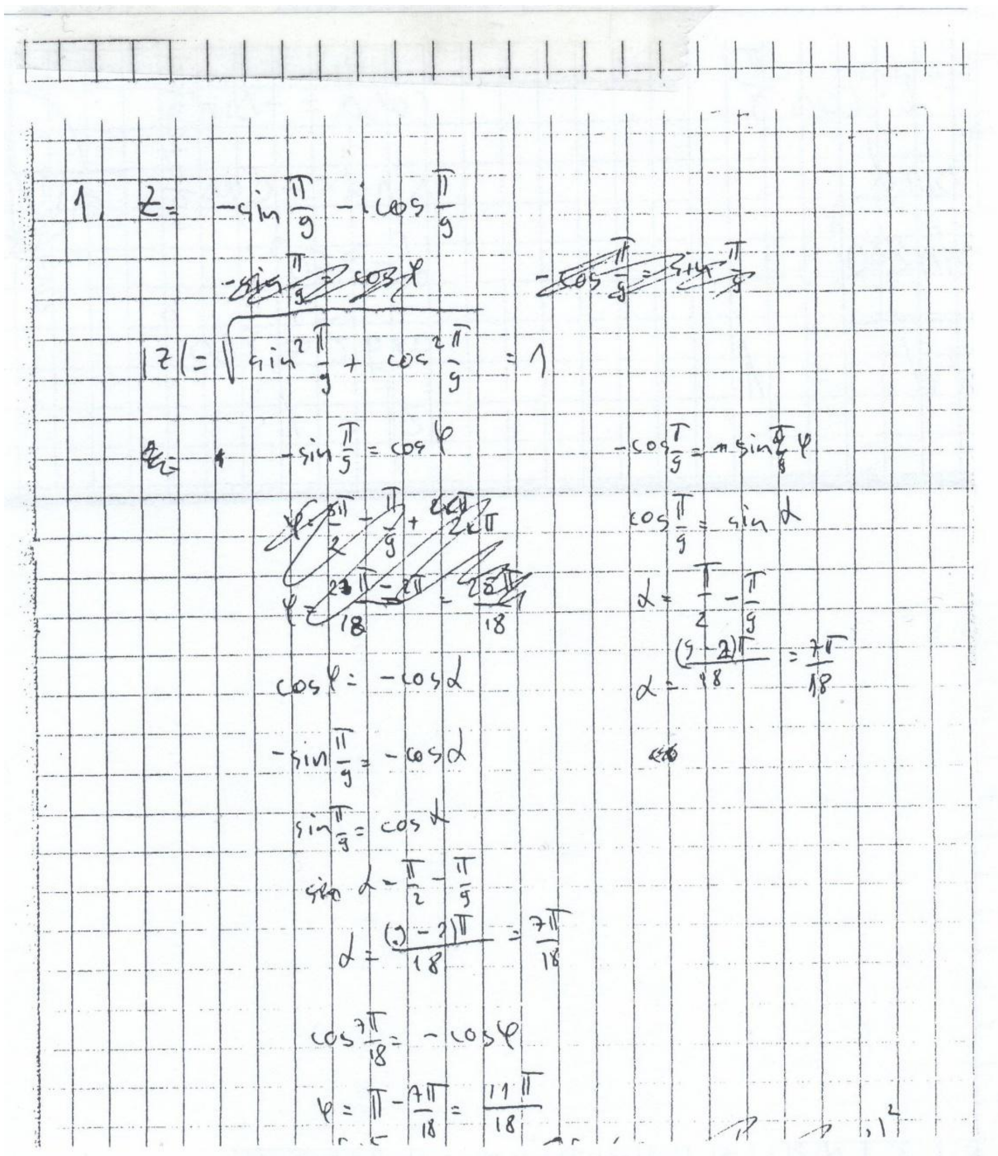
Задатак

Одредити модул и аргумент комплексног броја $-\sin\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}$

Решење ученика Н.Н.



1. $z = -\sin\frac{\pi}{9} - i\cos\frac{\pi}{9}$

$\cancel{-\sin\frac{\pi}{9} = \cos\varphi}$ $\qquad$ $\cancel{-\cos\frac{\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{9}}$

$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{\pi}{9}} = 1$

$-\sin\frac{\pi}{9} = \cos\varphi$ $\qquad$ $-\cos\frac{\pi}{9} = \sin\varphi$

$\cancel{\varphi = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{9} + 2k\pi}$

$\cancel{\varphi = \frac{27\pi - 2\pi}{18} = \frac{25\pi}{18}}$

$\cos\frac{\pi}{9} = \sin\alpha$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$

$\alpha = \frac{(9-2)\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$

$\cos\varphi = -\cos\alpha$

$-\sin\frac{\pi}{9} = -\cos\alpha$

$\sin\frac{\pi}{9} = \cos\alpha$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$

$\alpha = \frac{(9-2)\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$

$\cos\frac{7\pi}{18} = -\cos\varphi$

$\varphi = \pi - \frac{7\pi}{18} = \frac{11\pi}{18}$

Задатак

У скупу реалних бројева решити једначину по x

$$\frac{a+4b}{x+2b}+\frac{4b-a}{x-2b}=\frac{4b}{a},\quad a\neq 0, a,b\in\mathbb{R}.$$

Решење ученика Н.Н.

$$\Leftrightarrow \frac{(a+4b)(x-2b)+(4b-a)(x+2b)}{(x+2b)(x-2b)}=\frac{4b}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax-2ab+4bx-\cancel{8b^2}+4bx+\cancel{8b^2}-ax-2ab}{(x+2b)(x-2b)}=\frac{4b}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8bx-4ab}{(x+2b)(x-2b)}=\frac{4b}{a}, \quad x\neq 2b,\ x\neq -2b,\ a\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4b(2x-a)}{x^2-4b^2}=\frac{4b}{a} \quad (*)$$

за $b=0$: $\quad \frac{4\cdot 0(2x-a)}{x^2-0}=\frac{4\cdot 0}{a}$ T

$0=0$ T

За $b\neq 0$ претходну једнакост $(*)$ поделимо са b:

$$\Leftrightarrow \frac{2x-a}{x^2-4b^2}=\frac{4}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4b^2=2ax-a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2-4b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2-4b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2=4b^2$$

$$\Leftrightarrow x=a+2b \vee x=a-2b, \quad b\neq 0$$

Решење. За $b\neq 0$ два различита решења $x_1=a+2b$, $x_2=a-2b$

За $b=0$, $\forall x$ је решење једначине.

Задатак

Решити неједначину $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1} x<2$.

Решење ученика Н.Н.

Рад.

Како је $\log_{x+1} x=\dfrac{1}{\log_x x+1}$, имамо

$$\log_x(x^3+1)\cdot\frac{1}{\log_x(x+1)}<2$$

$$\frac{\log_x(x^3+1)}{\log_x(x+1)}<2$$

$$\log_x\left[(x^3+1)-(x+1)\right]<2$$

$$\log_x\left[x^3-x\right]<2$$

$$x^3-x<x^2$$

$$x(x^2-x+1)<0$$

Како је $x^2-x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ јер је $D<0$, закључујемо да је скуп решења полазне једначине $\underline{(-\infty,0]}$.

$$\boxed{x\in(-\infty,0]}$$

Задатак.

Одредити за које вредности реалног параметра a неједнакост $25^x + 4(a-1)5^x + a > 1$ важи за свако реално x.

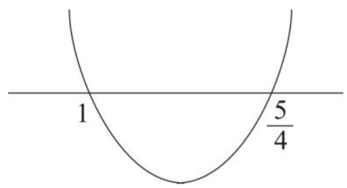
Решење ученика Н.Н.

Ако уведемо смену $t = 5^x$ добијамо неједнакост

$$t^2 + 4(a-1)t + a - 1 > 0.$$

Ова неједнакост је тачна за свако реално t ако је дискриминанта D тринома са леве стране мања од 0, $D < 0$.

$$D = 16(a-1)^2 - 4(a-1) = 4(a-1)(4a-5) < 0$$



Дакле, $a \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$.

Задатак.

Решити по x једначину $\sin x + \cos x = 1$.

Решење ученика Н.Н.

$$\sin x + \cos x = 1$$
$$(\sin x + \cos x)^2 = 1$$
$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \sin 2x = 1$$
$$\sin 2x = 0$$
$$2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Задатак.

Решити по x једначину $x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} - 5x^2 \cdot \sqrt[12]{x} = 6\sqrt[3]{x}$.

Решење ученика Н.Н.

$$x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} - 5x^2 \cdot \sqrt[12]{x} = 6\sqrt[3]{x}$$

$$x^3 \cdot \sqrt[12]{x^{10}} - 5x^2 \sqrt[12]{x} = 6\sqrt[12]{x^4}$$

Смена: $x = t^{12}$

$$t^{36} \cdot t^{10} - 5t^{24} \cdot t = 6t^4$$
$$t^{46} - 5t^{25} = 6t^4 \big/ : t^4$$
$$t^{42} - 5t^{21} = 6$$

Смена: $z = t^{21}$

$$z^2 - 5z - 6 = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$
$$z_1 = 6, z_2 = -1$$

$$z_1 = 6 \Rightarrow t_1 = \sqrt[21]{6} \Rightarrow x_1 = \sqrt[21]{6^{12}} = \sqrt[7]{6^4} = \sqrt[7]{1296}$$
$$z_2 = -1 \Rightarrow t_2 = \sqrt[21]{-1} = -1 \Rightarrow x_2 = (-1)^{12} = 1$$

Дакле решења дате једначине су $\sqrt[7]{1296}$ и 1.

Задатак

Решити неједначину $\sqrt{-x^2-x+20} > 3-x$.

Решење ученика Н.Н.

2. $\sqrt{-x^2-x+20} > 3-x$

1°

$-x^2-x+20 > 9-2x+x^2$

$-2x^2+x+11>0$

$2x^2-x-11>0$

$x_{12}=\frac{1\pm\sqrt{1+88}}{4}$

$x_{12} \to \frac{1+\sqrt{89}}{4}, \quad \frac{1-\sqrt{89}}{4}$

$-x^2-x+20\geq 0$

$x_{12}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{-2} \to -5, \ 4$

$x\in[-5,4]$

$3-x\geq 0$

$x<3$

$x\in\left[-5,\frac{1-\sqrt{89}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{89}}{4},3\right)$

2°

$3-x<0$

$-x<-3$

$x>3$

$-x^2-x+20\geq0$

$x\in[-5,4]$

$x\in(3,4]$

$x\in\left[-5,\frac{1-\sqrt{89}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{89}}{4},3\right)\cup(3,4]$

Задатак

Решити једначину $\log_{25}^2 x^2 = \log_5 x \cdot \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)$

Решење ученика Н.Н.

(6) $\log_{25}^2 x^2 = (\log_5 x)\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)$

$2\log_{25}^2 x = (\log_5 x)\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)$

$\log_5^2 x = (\log_5 x)\cdot\log_{5^{\frac{1}{2}}}(\sqrt{x+5}-1)$

$\log_5^2 x = (\log_5 x)\,2\log_5(\sqrt{x+5}-1)$

P $\log_5 x = 2\log_5(\sqrt{x+5}-1)$ $\neq 0$ $\qquad \log_5 x = 0$

$\boxed{x=1}$

$x = (\sqrt{x+5}-1)^2$

$x = x+5-2\sqrt{x+5}+1$

$\cancel{2}\sqrt{x+5} = 3$

$x+5 = 9 \qquad x+5 \geq 0$

$\boxed{x=4} \qquad x \geq -5$

$\boxed{x \in \{4, 1\}}$

Задатак

Решити једначину $\sqrt{x-5}-\sqrt{3x+12}+\sqrt{4x+13}=0$.

Решење ученика Н.Н.

1.

$\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+12}+\sqrt{4x+13}=0$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$

$x-1+4x+13+2\sqrt{(x-1)(4x+13)}=3x-12$

$5x+12+2\sqrt{4x^2+13x-4x-13}=3x-12$

$2x+24+2\sqrt{4x^2+9x-13}=0$

$2\sqrt{4x^2+9x-13}=-2x-24$

$4(4x^2+9x-13)=4x^2+576+96x$

$4x^2+9x-13=x^2+144+24x$

$3x^2-15x-157=0$

$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225+1884}}{6}$ $\nearrow$ $\frac{15+\sqrt{3009}}{6}$ $\searrow$ $\frac{15-\sqrt{3009}}{6}<0$ ↯

$x-1\geq 0$

$x\geq 1$

$3x+12\geq 0$

$3x\geq -12$

$x\geq -4$

$4x+13\geq 0$

$4x\geq 13$

$x\geq\frac{13}{4}$

Задатак

Решити једначину $\sqrt{x-5}-\sqrt{3x+12}+\sqrt{4x+13}=0$.

Решење ученика Н.Н.

5. $\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+12}+\sqrt{4x+13}=0$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12} \quad /^2$

$x-1\geq 0$, $x\geq 1$ $\wedge$ $4x+13\geq 0$, $4x\geq -13$, $x\geq -\frac{13}{4}$ $\wedge$ $3x+12\geq 0$, $3x\geq -12$, $x\geq -4$

$x\geq 1$

$x-1+4x+13+2\sqrt{(x-1)(4x+13)}=3x+12$

$5x+12+2\sqrt{(x-1)(4x+13)}=3x+12$

$2\sqrt{(x-1)(4x+13)}=3x+12-5x-12$

$2\sqrt{(x-1)(4x+13)}=-2x$

$\sqrt{(x-1)(4x+13)}=-x \quad /^2$

$(x-1)(4x+13)=x^2$

$4x^2+13x-4x-13=x^2$

$3x^2+9x-13=0$

$x_{12}=\frac{-9\pm\sqrt{9-4\cdot 3\cdot(-13)}}{6}=\frac{-9\pm\sqrt{165}}{6}$

$x_1=\frac{-9+\sqrt{165}}{6}$ $\quad x_2=\frac{-9-\sqrt{165}}{6}$ $\quad x_2<1$

pa nije rešenje

$x_1\geq 1$ pa jeste rešenje

Задатак

Одредити скуп свих вредности реалног параметра a за које једначина

$$2^{|x|} - 2^{-|x|} = a \cdot 2^x$$

има максималан број решења.

Решење ученика Н.Н.

1° Ако је $x \geq 0$, онда $\quad 2^x - 2^{-x} = a \cdot 2^x \ / : 2^{-x}$

$$2^{2x}(1-a) = 1$$

$$2x = \log_2 \frac{1}{1-a}$$

$$2x = -\log_2(1-a)$$

$$x = -\frac{1}{2}\log_2(1-a) < 0 \ \Big\} \ x \geq 0 \quad \text{нема решења}$$

2° Ако је $x < 0$, онда

$$2^{-x} - 2^x = a \cdot 2^x$$

$$2^{-x} = (1+a) \cdot 2^x$$

$$-2x = \log_2(1+a)$$

$x = -\frac{1}{2}\log_2(1+a)$ има решења ако је $a+1>0$

$a > -1$

Решење је $\boxed{a > -1}$.

Задатак
У скупу реалних бројева решити систем линеарних неједначина по x

$$(a-2)x > a-1,$$
$$(a-1)x > a-2,$$

где је a реални параметар.
Решење ученика Н.Н.

1° Ако је $a > 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > \frac{a-1}{a-2} \\ x > \frac{a-2}{a-1} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \left(\frac{a-1}{a-2}, +\infty\right)$

2° Ако је $a = 2 \Rightarrow 0 > 1 \Rightarrow$ нема решења

3° Ако је $1 < a < 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \frac{a-1}{a-2} \\ x > \frac{a-2}{a-1} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \left(\frac{a-2}{a-1}, \frac{a-1}{a-2}\right)$

4° Ако је $a = 1 \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow$ има решење $\forall x$

5° Ако је $a < 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \frac{a-1}{a-2} \\ x < \frac{a-2}{a-1} \end{array}\right\} \Rightarrow x < \frac{a-2}{a-1}$

Решење система:

$a < 1 \Rightarrow x < \frac{a-2}{a-1}$

$a = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$1 < a < 2 \Rightarrow x \in \left(\frac{a-2}{a-1}, \frac{a-1}{a-2}\right)$

$a = 2 \Rightarrow$ нема решења

$a > 2 \Rightarrow x > \frac{a-1}{a-2}$

Задатак

Решити неједначину $\log_{\sqrt[4]{x}} \log_2(4^x - 12) \leq 4$.

Решење ученика Н.Н.

$x > 0,\ x \neq 1$

$1^\circ\quad 0 < x < 1$

$\log_2(4^x - 12) \geq x$

$4^x - 2^x - 12 \geq 0$

$t^2 - t - 12 \geq 0,\ t > 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2}$

$t_1 = 4 \quad \vee \quad t_2 = -3$

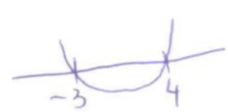
$t \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

$2^x > 4 \Rightarrow x \in (2, +\infty)$

$2^\circ\quad x > 1 \qquad \log_2(4^x - 12) \leq x$

$4^x - 2^x - 12 \leq 0$

$t^2 - t - 12 \leq 0,\ t > 0$



$t \in [-3, 4]$

$-3 \leq t \leq 4$

$-3 \leq 2^x \leq 2^2$

$x \leq 2$

$\overset{1^\circ}{\underset{2^\circ}{\Rightarrow}} \ x \in (-\infty, 2] \cup [2, +\infty) \Rightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}}$

Задатак

Решити неједначину $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x<2$.

Решење ученика Н.Н.

Рад.

Како је $\log_{x+1} x = \dfrac{1}{\log_x x+1}$, имамо

$$\log_x (x^3+1)\cdot\frac{1}{\log_x (x+1)} < 2$$

$$\frac{\log_x (x^3+1)}{\log_x (x+1)} < 2$$

$$\log_x \left[(x^3+1)-(x+1)\right] < 2$$

$$\log_x [x^3-x] < 2$$

$$x^3-x < x^2$$

$$x(x^2-x+1) < 0$$

Како је $x^2-x+1>0$, $\forall x\in R$ јер је $D<0$, закључујемо да је скуп решења полазне једначине $(-\infty, 0]$.

$$\boxed{x\in(-\infty,0]}$$

Задатак

Решити по x једначину $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{a}{x+b}=\dfrac{2b}{x^2-b^2}$, у којој су a, b реални параметри.

Решење ученика Н. Н.

Дата једначина је еквивалентна са следећим једначинама:

$\dfrac{ax+ab+ax-ab}{x^2-b^2}=\dfrac{2b}{x^2-b^2}$,

$\dfrac{2ax}{x^2-b^2}=\dfrac{2b}{x^2-b^2}$,

$ax=b$.

Дакле,

1° ако је $a\neq 0$ једначина има јединствено решење $x=\dfrac{b}{a}$;

2° ако је $a=0$ и $b=0$, решење дате једначине је сваки реалан број;

3° ако је $a=0$ и $b\neq 0$ једначина нема решења.

Задатак

У зависности од реалних параметара a и b у скупу реалних бројева решити по x једначину

$$\frac{ax+b}{x^2+ax+b}=0.$$

Решење ученика Н. Н.

Дата једначина је еквивалентна са

$$ax=-b \text{ и } x^2+ax+b\neq 0.$$

Ако је $a=0$ и $b\neq 0$, тада дата једначина нема решења јер је немогуће да је $0\cdot x=-b\neq 0$.
Ако је $a=b=0$, тада је решење дате једначине сваки реалан број.
Нека је $a\neq 0$. Пошто једначину решавамо у скупу реалних бројева потребно је и да дискриминанта тринома x^2+ax+b буде ненегативна тј. $D=a^2-4b\geqslant 0$. Такође, решење $ax=-b$, тј. број $x=-\frac{b}{a}$ не сме да буде нула имениоца, тј. мора да буде

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2+a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=\frac{b^2}{a^2}\neq 0,$$

што је испуњено ако је $b\neq 0$.
Дакле, у случају $a\neq 0$, једначина има јединствено решење $x=-\frac{b}{a}$ ако и само ако је $a^2\geqslant b$ и $b\neq 0$, а нема решења ако је $a^2\leqslant b$ или $b=0$.

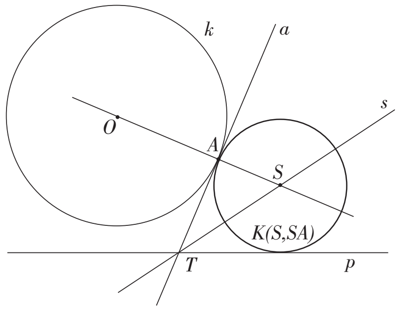
Задатак

Дата је права p, кружница k и на њој тачка A, при чему права p и кружница k немају заједничких тачака. Конструисати кружницу која додирује праву p и круг k у тачки A.

Решење ученика Н. Н.

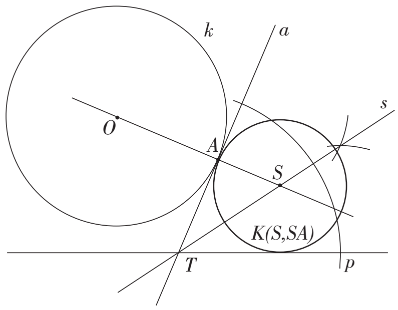
Анализа.

Тангента a датог круга k у тачки A биће заједничка тангента датог и траженог круга. Центар траженог круга је на правој OA, где је O центар круга k. Како тражени круг треба да додирује праве a и p, центар му припада симетрали угла одређеног правама a и p.



Конструкција.

Конструишемо најпре тангенту a датог круга k у тачки A. Затим, конструишемо симетралу s угла кога образују праве a и p. Пресек праве s и праве OA, тј. тачка S, је центар траженог круга. Дакле, тражени круг је $K(S, SA)$.



Доказ.

Да је $K(S, SA)$ тражени круг следи директно из анализе и конструкције.

Дискусија.

Задатак нема решења ако је права a паралелна са p, тј. ако је права OA нормална на p; иначе задатак има једно решење.

Задатак

Одредити све комплексне бројеве z такве да је $\dfrac{z-i}{z-1}$ чисто имагинаран број и важи $|z-3+i|=1$.

Решење ученика Н. Н.

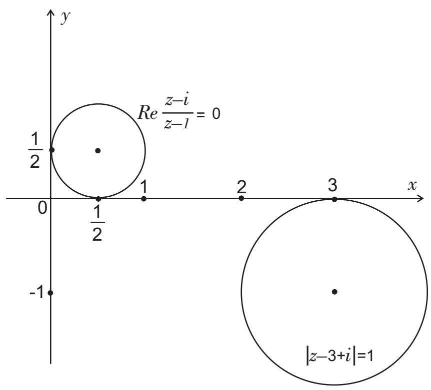
За $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, имамо да је

$$\begin{aligned}
\frac{z-i}{z-1} &= \frac{x+yi-i}{x+yi-1} = \frac{x+yi-i}{x-1+yi}\cdot\frac{x-1-yi}{x-1-yi} \\
&= \frac{x^2+\cancel{xyi}-xi-x-yi+i-\cancel{xyi}+y^2-y}{(x-1)^2+y^2} \\
&= \frac{x^2-x+y^2-y}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{1-x-y}{(x-1)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Услов $\mathcal{R}e\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right)=0$ еквивалентан је са $x^2-x+y^2-y=0$, тј. са $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$, што геометријски представља кружницу са центром у тачки $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, полупречника $\dfrac{1}{2}$.
С друге стране, услов $|z-3+i|=1$, еквивалентан је са

$$(x-3)^2+(y+1)^2=1$$

што представља једначину кружнице са центром у $(3,-1)$ полупречника 1.



Са слике се види да комплексни бројеви који задовољавају оба услова не постоје, тј. да је скуп решења $\emptyset$.

Задатак

Наћи скуп свих вредности реалног параметра a тако да неједнакост $\log_{a^2+a+1}\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}>1$ важи за сваки реалан број x.

Решење ученика Н. Н.

Лева страна неједнакости је дефинисана ако је $a^2+a+1>0$, $a^2+a+1\neq 1$ и $\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}>0$. Пошто је

$$a^2+a+1=1 \Leftrightarrow a^2+a=0 \Leftrightarrow a=0 \vee a=-1,$$

а неједнакости $a^2+a+1>0$ и $\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}>0$ важе за свако a, односно за свако x, следи да је лева страна дате неједнакости дефинисана ако $a\in R\setminus\{0,-1\}$ и $x\in R$.

Дата неједнакост је еквивалентна са $\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}>a^2+a+1$, тј. са

$$(a^2+a-2)x^2+a^2+a-3<0.$$

Последња неједнакост важи за свако реално x ако је $a^2+a-2\leqslant 0$. Како је

$$a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2},\ \text{ тј. } a_1=-2,\ a_2=1,$$

скуп решења неједначине $a^2+a-2\leqslant 0$ је затворени интервал $[-2,1]$. Имајући у виду услове дефинисаности, скуп свих вредности реалног параметра a за који дата неједнакост важи је $[-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1]$.

Задатак

Решити једначину $\log_{25}^3 x^2 = \left(\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)\right) \cdot (\log_5 x)^2$.

Решење ученика Н. Н.

Због дефинисансти израза који се појављују у овој једначини, добијамо услове:
$x \neq 0$, јер је $x^2 \geqslant 0$,
$x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$,
$\sqrt{x+5} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant -4$,
из којих следи да решење једначине припада скупу $[-4, 0) \cup (0, +\infty)$.
Даље, пошто је
$\log_{25}^3 x^2 = 2\log_{5^2}^3 x = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_5^3 x = \log_5^3 x = (\log_5 x)^3$,
$\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1) = 2\log_5(\sqrt{x+5}-1) = \log_5(\sqrt{x+5}-1)^2$,
дата једначина се може записати у облику
$(\log_5 x)^3 = \log_5(\sqrt{x+5}-1)^2 \cdot (\log_5 x)^2$,
а после дељења са $\log_5 x$,
$\log_5 x = \log_5(\sqrt{x+5}-1)^2$.
Последња једначина је еквивалентна са
$x = (\sqrt{x+5}-1)^2$.
$x = x + 5 - 2\sqrt{x+5} + 1$
$2\sqrt{x+5} = 6$
$\sqrt{x+5} = 3$
$x + 5 = 9$
$x = 4$

Задатак

У зависности од реалних параметара a, b, c, d решити систем једначина:

$$\begin{aligned}&x + y + z = 1\\&ax + by + cz = d\\&a^2x + b^2y + c^2z = d^2,\end{aligned}$$

при чему је $d \neq a$, $d \neq b$, $d \neq c$.

Решење ученика Н. Н.

Систем решавам Крамеровим правилом.
Детерминанта датог система је

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}\\ &= bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b\\ &= bc(c-b) - a(c^2 - b^2) + a^2(c-b)\\ &= (c-b)(bc - ac - ab + a^2) = (c-b)(c-a)(b-a).\end{aligned}$$

Како се $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ од Δ разликује само по томе што уместо a стоји d, имамо да је $\Delta_x = (b-d)(c-d)(c-b)$.
Слично је $\Delta_y = (d-a)(c-a)(c-d)$ и $\Delta_z = (b-a)(d-a)(d-b)$.
1° Ако је $a \neq b \neq c$, тада је $\Delta \neq 0$, па је решење система:

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\ y = \frac{(b-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)},\ z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

2° Ако је $a = b \neq c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, па систем нема решења.
3° Ако је $a \neq b = c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_y \neq 0$, па систем нема решења.
4° Ако је $a = b = c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па систем има бесконачно много решења.

Задатак
Одредити скуп свих вредности реалног параметра m таквих да је за свако реално x важи неједнакост

$$\sqrt{5x^2+mx+2} > 1+2x.$$

Решење ученика Н. Н.

Да би нејднакост важила за сваки реалан број x неопходно је да корен $\sqrt{5x^2+mx+2}$ буде увек дефинисан, тј. да за свако x важи $5x^2+mx+2 \geqslant 0$. Последња неједнакост важи за свако x ако дискриминанта није позитивна:

$$D = m^2 - 40 \leqslant 0, \quad \text{тј. ако} \quad m \in [-\sqrt{40}, \sqrt{40}].$$

За $m \in [-\sqrt{40}, \sqrt{40}]$, дата неједнакост ће важити ако и само ако

$$5x^2 + mx + 2 > 1 + 4x + 4x^2, \ \text{ за свако } \ x,$$

односно

$$x^2 + (m-4)x + 1 > 0, \ \text{ за свако } \ x.$$

Најзад, последња неједнакост важи за свако x ако је одговарајућа дискриминанта негативна:

$$D_1 = (m-4)^2 - 4 = m^2 - 8m + 12 < 0.$$

$$m_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}, \ m_1 = 6, \ m_2 = 2,$$

Дакле, $D_1 < 0$ ако $m \in (2,6)$. Како је

$$[-\sqrt{40}, \sqrt{40}] \cap (2,6) = (2,6),$$

добијамо коначно решење: $\boxed{2 < m < 6}$