СТЕРЕОМЕТРИЈА

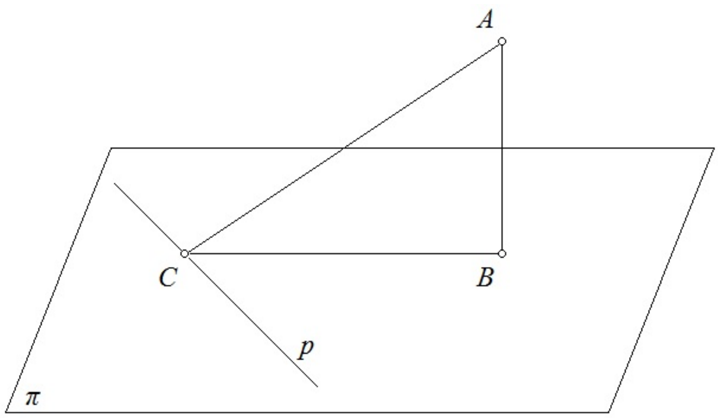
Маја Ристић 89/2012
Матеј Милићевић 14/2012
Милица Јовановић 17/2012
Катарина Ћојбашић 67/2012
Никола Марковић 8/2011
Ђорђе Николић 32/2012

Математички факултет

Београд 2015.

1. (Теорема о три нормале.) Нека је права AB нормална на раван π у тачки B и права BC нормална на правој p равни π у тачки C. Тада је права AC нормална на правој p.

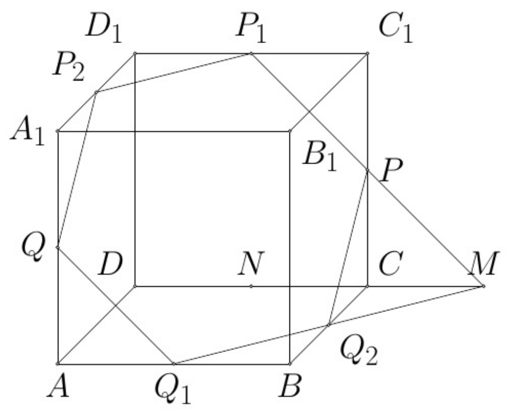
Решење: Нека је D тачка праве p таква да је $AB = CD$. Правоугли троуглови ABC и DCB су подударни, одакле следи $AC = BD$, па су подударни и троуглови ABD и DCA ($AD = DA,\ BD = CA,\ AB = DC$). Дакле, $\angle ACD = \angle ABD$, тј. $AC \perp p$.



2. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка са ивицом дужине a. Нека је тачка N средиште ивице CD, M тачка праве (CD) таква да је C средиште дужи MN. Ако су P и Q, редом, средишта ивица CC_1 и CB израчунати површину пресека равни, одређене са P, M и Q, и коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Решење: Уочимо да је тражени пресек заправо правилни шестоугао $PP_1P_2Q_2Q_1Q$ (види слику), где је P_1 средиште C_1D_1, Q_2 средиште AA_2, P_2 средиште A_1D_1 и Q_1 средиште AB. Означимо, још, са O средиште коцке.
P_1 и Q_1 тривијално припадају равни (MPQ). Права P_1Q_1 припада (MPQ), па и средиште дужи P_1Q_1, односно центар коцке O, припада равни (MPQ).
Даље добијамо из правих OP и OQ да $P_2,\ Q_2 \in (MPQ)$.
Израчунајмо површину

$$P_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$



3. Дате су тачке A и B, раван α и дуж l. Одредити геометријско место тачака M равни α за које важи $MA^2 - MB^2 = l^2$.

Решење: Нека је N подножје нормалне из M на AB, где је M произвољна тачка траженог геометријског места тачака. Тада је $MA^2 = MN^2 + NA^2$ и $MB^2 = MN^2 + NB^2$, па је $MA^2 - MB^2 = NA^2 - NB^2$. Према томе, положај тачке N не зависи од M и одређен је релацијом $NA^2 - NB^2 = l^2$. Лако се добија да је удаљеност тачке N од тачке A (у правцу тачке B) једнака

$$AN = \frac{AB}{2} + \frac{l^2}{2AB}. \tag{1}$$

Исто тако, ако је M произвољна тачка у простору за коју је $MN \perp AB$, N одређена релацијом (1), биће $MA^2 - MB^2 = l^2$.
Тражено геометријско место тачака је пресечна права дате равни α и равни кроз N нормалне на AB.

4. Основа тростране пирамиде је правоугли троугао са катетама дужине 12 и 35. Све бочне стране заклапају са равни основе угао од 60^o. Одредити површину пирамиде.

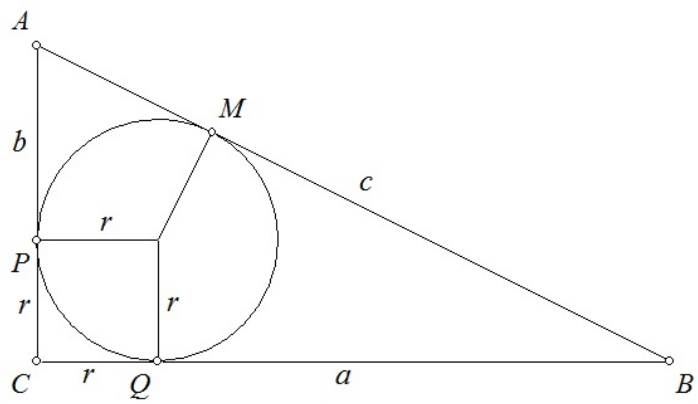
Решење: Помоћу Питагорине теореме лако се добија да хипотенуза основе има дужину 37. У правоуглом троуглу са катетама a и b и хипотенузом c, пречник уписане кружнице је $2r = a + b - c$. Наиме, према слици је

$$c = AM + BM = BQ + AP = (a - r) + (b - r)$$

тј. $c = a + b - 2r$. На основу тога је полупречник уписане кружнице основе једнак $\frac{35+12-37}{2} = 5$.
Како су троуглови страница висине пирамиде, висине бочне стране и дужи која

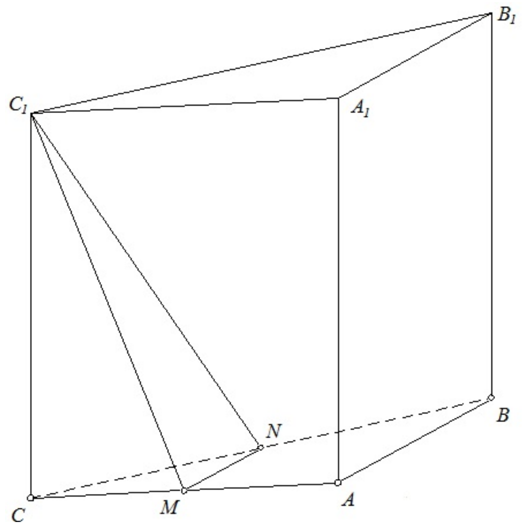
садржи подножје висине пирамиде и нормална је на одговарајућу ивицу основе подударни (има их укупно три, а подударни су јер имају исте углове 30^o, 60^o и 90^o и заједничку страницу тј. висину пирамиде) па је подножје нормале пирамиде подједнако удаљено од ивица основе те закључујемо да ће подножје висине пирамиде бити управо центар уписане кружнице у основу пирамиде.
Следи да је висина сваке бочне стране пирамиде једнака $2 \cdot 5 = 10$. Површина пирамиде је

$$\frac{12 \cdot 35}{2} + \frac{10(35 + 12 + 37)}{2} = 210 + 420 = 630.$$



5. Нека је $ABCA_1B_1C_1$ правилна тространа призма основне ивице a и висине H и нека је тачка M средиште ивице AC. Одредити одстојање правих AB и C_1M.

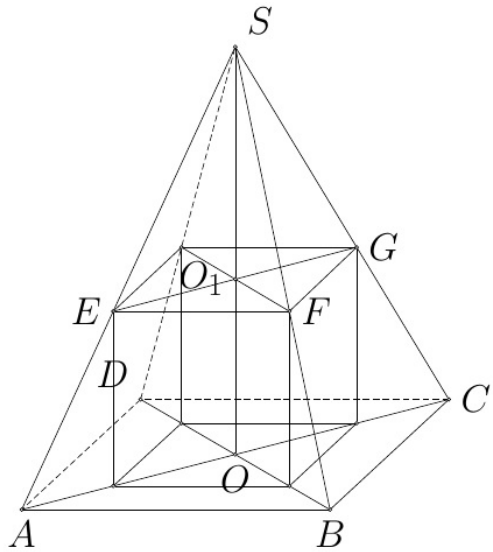
Решење: Ако је N средиште ивице BC (види слику), онда је $MN \parallel AB$ и права AB је паралелна равни C_1MN, а одстојање правих AB и C_1M једнако је одстојању тачке A од равни C_1MN. Како тачке A и C имају исто одстојање од равни C_1MN тражено одстојање једнако је висини h из темена C пирамиде MNC_1C. Запремина те пирамиде је $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot H = \frac{1}{3}P_{\Delta C_1MN} \cdot h$, а како је $P_{\Delta C_1MN} = \frac{a\sqrt{3a^2+16H^2}}{16}$, то је $h = \frac{aH\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+16H^2}}$.



6. Дата је правилна четворострана пирамида основне ивице $a = 5\sqrt{2}$ и бочне ивице $s = 13$. Израчунати ивицу коцке која је уписана у ту пирамиду тако да се њена четири горња темена налазе на ивицама пирамиде.

Решење: Како је $AB = a$ то је $AC = a\sqrt{2}$, види слику. Ако $EF = OO_1$ обележимо са x, следи да је $EG = x\sqrt{2}$. $SO = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}$ добијамо из правоуглог троугла SOA. На основу претходног је $SO_1 = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} - x$. Из сличности троуглова ACS и EGS имамо $\frac{AC}{EG} = \frac{SO}{SO_1}$, тј.

$$\frac{a\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}}{\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} - x}, \quad x = \frac{60}{5 + 6\sqrt{2}}.$$



7. У зарубљену купу полупречника веће основе 4 уписана је лопта запремине 36π. Колика је запремина зарубљене купе?

Решење: Полупречник уписане сфере је $r = 3$ (запремина $V = \frac{4}{3}r^3\pi$). У пресеку равни која садржи центар O сфере и нормална је на основу купе добијамо трапез $ABCD$ који сферу додирује у тачкама M, N, O, Q које припадају страницама AB, BC, CD, DA редом. Нека је $AD \cap BC = \{E\}$. Видимо да су троуглови AME и QOE слични ($\angle AME = \angle EQO = \frac{\pi}{2}$, $\angle MEA = \angle OEQ$). Такође $AQ = AM = 4$ јер су то тангентне дужи из исте тачке на кружницу. Сада имамо

$$\frac{4}{3} = \frac{AM}{OQ} = \frac{EP+6}{EQ} = \frac{EQ+4}{EP+3},$$

а одавде добијамо

$$4EP + 12 = 3EQ + 12, \quad 4EQ = 3EP + 18.$$

Сада имамо

$$EP = \frac{3}{4}EQ$$

$$4EQ = \frac{9}{4}EQ + 18$$

$$\frac{7}{4}EQ = 18$$

$$EQ = \frac{72}{7}, \quad EP = \frac{54}{7}.$$

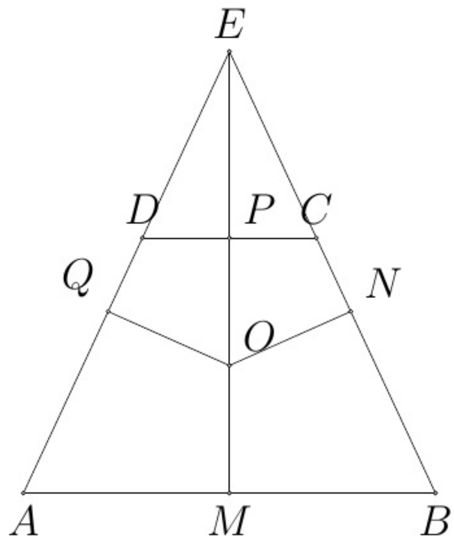
Троуглови AME и DPE су слични ($\angle AME = \angle DPE = \frac{\pi}{2}$, $\angle MEA = \angle PED$).

$$\frac{AM}{PD} = \frac{ME}{PE}$$

$$\frac{4}{PD} = \frac{6 + \frac{54}{7}}{\frac{54}{7}} = \frac{96}{54} \Rightarrow PD = \frac{9}{4}.$$

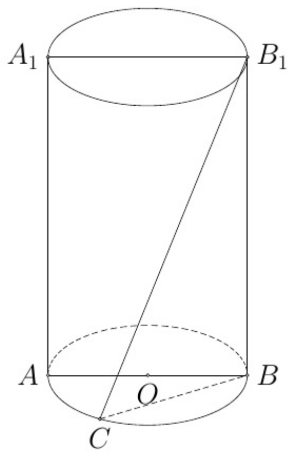
Сада можемо израчунати запремину.

$$V = \frac{1}{3}(AM^2 \cdot ME\pi - DP^2 \cdot PE\pi) = \frac{481}{8}\pi.$$



8. Нека су AB и A_1B_1 паралелни пречници двеју основа правог ваљка, висине H и нека тачка C дели лук AB у односу $1:2$. Израчунати запремину тог ваљка, ако права CB_1 гради са равни основе угао од 45^o.

Решење: Нормална пројекција дужи CB_1 на основу ваљка је дуж CB (види слику), па је $\angle BCB_1 = 45^o$. Дакле, $CB = H$. Из правоуглог троугла ABC ($\angle BAC = 60^o$) добијамо $r = \frac{H}{\sqrt{3}}$, па је $V = r^2\pi H = \frac{H^3\pi}{3}$.



9. Дат је тетраедар $ABCD$. Сфера која пролази кроз темена A, B и C, сече ивице DA, DB и DC, редом, у тачкама A_1, B_1 и C_1. Ове тачке, редом, пресликамо у односу на средишта одговарајућих ивица и означимо их са A_2, B_2 и C_2. Доказати да су тачке A, B и C једнако удаљење од центра сфере описане око тетраедра $A_2B_2C_2D$.

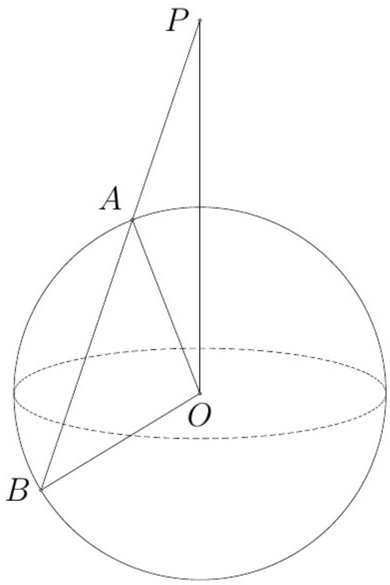
Дефиниција: Потенција тачке P у односу на сферу $S(O,r)$ је број

$$p(P,S) = PO^2 - r^2.$$

Лема: Ако произвољна права q из тачке P продире сферу $S(O,r)$ у две тачке A и B онда важи:

$$p(P,S) = PO^2 - r^2 = PA \cdot PB.$$

Доказ: Посматрајмо пресек равни (PBD) и сфере S. У пресеку добијамо велики круг и тврђење се своди на потенцију тачке у односу на круг у равни (види слику).



□

Решење задатка: Означимо са S_1 сферу која садржи тачке $A,\ B,\ C,\ A_1,\ B_1,\ C_1$, са S_2 сферу око $A_2B_2C_2D$. Због потенције у односу на сферу S_1 имамо да је

$$DA \cdot DA_1 = DB \cdot DB_1 = DC \cdot DC_1 \tag{2}$$

Из услова о положају $A_2,\ B_2$ и C_2 имамо

$$AA_2 = DA_1,\ BB_2 = DB_1,\ CC_2 = DC_1. \tag{3}$$

Када релације (3) убацимо у (2) добијамо

$$AD \cdot AA_2 = BF \cdot BB_2 = CD \cdot CC_2. \tag{4}$$

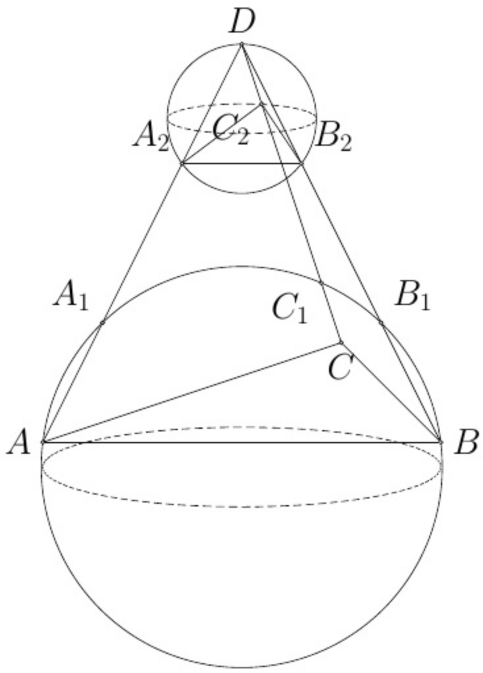
Међутим, релације (4) представљају једнакост потенције тачака $A,\ B$ и C у односу на сферу S_2. Зато имамо:

$$AO^2 - r^2 = BO^2 - r^2 = CO^2 - r^2,$$

односно,

$$AO_2 = BO_2 = CO_2$$

што се и тражило у задатку.



10. У лопту су уписане две коцке. Доказати да збир квадрата растојања темена једне коцке од темена друге не зависи од њиховог међусобног положаја.

Решење: Нека су $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $PQRSP_1Q_1R_1S_2$ коцке уписане у лопту са центром O и полупречником R. Како је O пресек дијагонала коцки и $\angle APC_1 = 90^o$, то је

$$PA^2 + PC_1^2 = AC_1^2 = 4R^2.$$

Слично је

$$PB^2 + PD_1^2 = BD_1^2 = 4R^2,$$
$$PC^2 + PA_1^2 = CA_1^2 = 4R^2,$$
$$PD^2 + PB_1^2 = DB_1^2 = 4R^2.$$

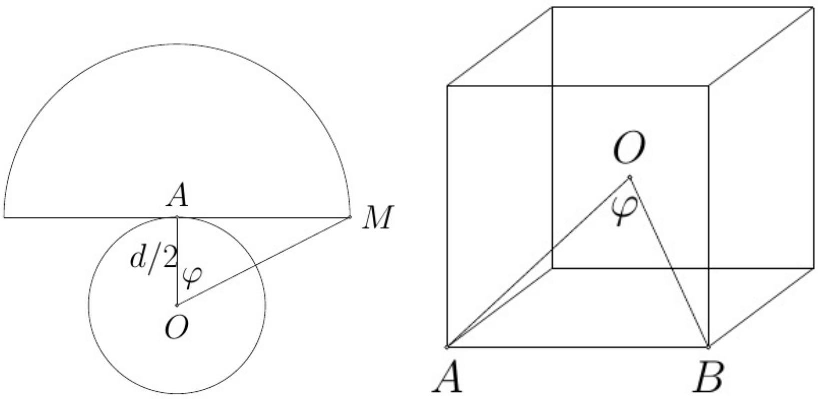
Сабирајући ове четири једнакости добијамо

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 + PA_1^2 + PB_1^2 + PC_1^2 + PD_1^2 = 16R^2.$$

Исто важи за збирове квадрата растојања тачака $Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1$ од темена коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако са σ обележимо збир свих 64 квадрата растојања, тада је $\sigma = 8 \cdot 16R^2 = 128R^2$, што очито не зависи од међусобног положаја коцки.

11. Планета облика сфере има пречник d. Може ли се на њену површину сместити осам истраживачких станица, тако да свако небеско тело на удаљености d од површине планете буде видљиво са бар две станице?

Решење: Одговор: да. Поставимо истраживачке станице у темена коцке уписане у сферу са центром O. Заиста, из тачке A (види слику) виде се све тачке сферног одсечка који од сфере одсеца круг с центром у A који пролази кроз M, при чему је M тачка тангентне равни на сферу кроз тачку A, таква да је $OM = \frac{3}{2}d$. Означимо $\varphi = \angle AOM$. Тада је $\cos\varphi = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{3}$. Даље, ако је B положај друге истраживачке станице (смештене у суседном темену коцке) онда је $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\varphi$, па је $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. Зато је цела сфера с центром O полупречника $\frac{3}{2}d$ покривена са четири таква сферна одсечка који одговарају некој четворци несуседних темена коцке. Следи да је свака тачка те сфере покривена са бар два од укупно осам тих одсечака.



12. Дат је произвољан тетраедар $ABCD$. На сваку страну тетраедра $ABCD$ постављена је нормала у тежишту те исте стране. Доказати да се пројекције било које три од ове четири нормалне на преосталу четврту страну тетраедра секу у једној тачки.

Решење: Нека су A_1, B_1, C_1 и D_1 тежишта стране (BCD), (ACD), (ABD) и (ABC), редом. Желимо да покажемо да је $(ABC)||(A_1B_1C_1)$.
Нека су P и Q средишта од AC и AB. Тада:

(i) $PQ||BC$ као средња линија ΔABC

(ii) $PQ||B_1C_1$ по Талесовој теореми $\frac{DB_1}{B_1P} = \frac{DC_1}{C_1Q} = \frac{2}{1}$.

Из (i) и (ii) имамо да је $BC||B_1C_1$.
Аналогно је $A_1C_1||AC$ па имамо да је $(ABC)||(A_1B_1C_1)$.
Сада су наше нормале из задатка заправо висине тетраедра $A_1B_1C_1D_1$. Према томе, из теореме о три нормалне знамо да се пројекције три висине тетраедра

секу у једној тачки, па исто можемо да закључимо и за страну (ABC), из чињенице да су (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ паралелне.