Методика наставе математике и рачунарства

Полиноми

Аутори:

Катарина Веселиновић (45/2012)
Марија Живановић (148/2012)
Милица Ивезић (159/2011)
Урош Бошковић (116/2012)
Матија Стефановић (77/2012)

Професор:

Небојша Икодиновић

Зимски семестар 2015/2016.

Дефиниција: Реални полином (једне промењиве) је функција аргумента x који се може записати у облику $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где је $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a_i \in \mathbb{R}$ за свако $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Бројеве $a_0, a_1, \ldots, a_n$ називамо коефицијентима полинома P, где је број a_0 слободан коефицијент, a_n водећи коефицијент.

Безуов став: Остатак дељења полинома $P(x)$ полиномом $x - a$ једнак $P(a)$.

1. Одредити остатак при дељењу полинома $3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ полиномом $x + 2$ коришћењем:

а) алгоритма за дељење полинома;

б) Безуовог става.

Решење:

а)

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
3x^6 - 2x^5 & & +x^3 & & -4x & -1 & = \big(x+2\big)\big(3x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 31x^2 + 62x - 128\big) + 255 \\
\underline{-3x^6 - 6x^5} & & & & & & \\
-8x^5 & & & & & & \\
\underline{8x^5 + 16x^4} & & & & & & \\
& 16x^4 & +x^3 & & & & \\
& \underline{-16x^4 - 32x^3} & & & & & \\
& & -31x^3 & & & & \\
& & \underline{31x^3 + 62x^2} & & & & \\
& & & 62x^2 & -4x & & \\
& & & \underline{-62x^2 - 124x} & & & \\
& & & & -128x & -1 & \\
& & & & \underline{128x + 256} & & \\
& & & & & 255 &
\end{array}
$$

Остатак је 255.

б) По Безуовом ставу, остатак при дељењу полинома $P(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ полиномом $x + 2$ ће бити $P(-2)$, тј:
$3 \cdot (-2)^6 - 2 \cdot (-2)^5 + (-2)^3 - 4 \cdot (-2) - 1 = 3 \cdot 64 + 2 \cdot 32 - 8 + 8 - 1 = 4 \cdot 64 - 1 = 256 - 1 = 255$.

2. За које је реалне вредности параметра m полином $p(x) = mx^3 + 11x^2 + 7x + m$ дељив полиномом $2x + 3$?

Решење:

Обележимо полином којим делимо са $q(x) = 2x + 3$. Нула овог полинома је оно x за које је $2x + 3 = 0$, тј. нула је $x = -\dfrac{3}{2}$.

Да би полином $p(x)$ био дељив полиномом $q(x)$, по Безуовом ставу, мора да важи: $p(-\dfrac{3}{2}) = 0$:

$$\begin{aligned} p(-\frac{3}{2}) = m(-\frac{3}{2})^3 + 11(-\frac{3}{2})^2 + 7(-\frac{3}{2}) + m = 0 \\ m(-\frac{27}{8}) + 11\frac{9}{4} - \frac{21}{2} + m = 0 \\ -27m + 29 - 421 + 8m = 0 \\ -19m + 198 - 84 = 0 \\ 19m - 144 = 0. \end{aligned}$$

Дакле, за $m = \frac{144}{9} = 6$ дати полином $p(x)$ је дељив полиномом $2x + 3$.

3. Показати да је вредност израза:

$$\frac{\frac{1}{x^6} - 64}{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$$

полином, чија је вредност непаран број за свако $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Решење:

Запишимо дати израз у облику:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x^6} - 64}{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x} &= \frac{\frac{1-64x^6}{x^6}}{\frac{4x^2+2x+1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x} \\ &= \frac{1-64x^6}{x^4 \cdot (4x^2+2x+1)} \cdot \frac{x^4}{4x^2-4x+1} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x} \\ &= \frac{1-((2x)^2)^3}{4x^2+2x+1} \cdot \frac{1}{4x^2-4x+1} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x} \end{aligned}$$

Уочавамо да полином у бројиоцу представља разлику кубова, а у имениоцу квадрат разлике. Њиховим расписивањем и евентуалним "скраћивањем", које је могуће јер је x цео број различит од нуле, добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{(1-(2x)^2)(1+(2x)^2+(2x)^4)}{4x^2+2x+1} \cdot \frac{1}{(1-2x)^2} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x} &= \frac{(1+2x)(1+(2x)^2+(2x)^4)}{(1-2x)(4x^2+2x+1)} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x} \\ &= \frac{(1+2x)(1+(2x)^2+(2x)^4) - 4x^2(2x+1)(4x^2+2x+1)}{(1-2x)(4x^2+2x+1)} \\ &= \frac{(1+2x)(1+(2x)^2+(2x)^4 - 4x^2 - 8x^3 - 16x^4)}{(1-2x)(4x^2+2x+1)} \\ &= \frac{(1+2x)(1+4x^2+16x^4-4x^2-8x^3-16x^4)}{(1-(2x)^3)} \\ &= 1+2x, \end{aligned}$$

за свако $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ што је и требало показати.

4. Полином $a^6+a^5+a^4+2a^3+a^2+a+1$ раставити на несводљиве факторе.

Решење:

$$\begin{aligned}
a^6+a^5+a^4+2a^3+a^2+a+1 &= a^6+a^5+a^4+a^3+a^3+a^2+a+1\\
&= a^5(a+1)+a^3(a+1)+a^2(a+1)+(a+1)\\
&= (a+1)(a^5+a^3+a^2+1)\\
&= (a+1)(a^3(a^2+1)+(a^2+1))\\
&= (a+1)(a^2+1)(a^3+1)\\
&= (a+1)^2(a^2+1)(a^2-a+1)
\end{aligned}$$

5. Користећи Безуов став раставити на чиниоце полином $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$.

Решење:

Делиоци броја 12 су: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$. Треба одредити који од ових бројева анулира дати полином:

$P(-1)=1+2-7-8+12=0$
$P(1)=1-2-7+8+12=12\neq0$
$P(-2)=16+16-28-16+12=0$
$P(2)=16-16-28+16+12=0$
$P(-3)=81+54-63-24+12=60\neq0$
$P(3)=81-54-63+24+12=0$

Добили смо четири нуле полинома $P(x)$: $-1,\pm2,3$, па пишемо:
$P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$.

6. Доказати идентитет:

$\left(2a+\dfrac{a^2+9b^2}{3b}\right):\left(a+\dfrac{9b^2}{a+6b}\right)-\dfrac{a}{3b}\left(1+3b+\dfrac{6b}{a}\right)=-a$, где: $a\neq0,\ b\neq0,\ a\neq-6b$.

Решење:

$$\frac{6ab+a^2+9b^2}{3b}:\frac{a^2+6ab+9b^2}{a+6b}-\frac{a}{3b}\cdot\frac{a+3ab+6b}{a}=-a$$
$$\frac{6ab+a^2+9b^2}{3b}\cdot\frac{a+6b}{a^2+6ab+9b^2}-\frac{a+3ab+6b}{3b}=-a$$
$$\frac{a+6b}{3b}-\frac{a+3ab+6b}{3b}=-a$$
$$\frac{a+6b-a-3ab-6b}{3b}=-a$$
$$\frac{-3ab}{3b}=-a$$
$$-a=-a$$

7. Показати да је вредност израза:

$(2-k+4k^2+\frac{5k^2-6k+3}{k-1}) \div (2k+1+\frac{2k}{k-1})$

непаран број за свако $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

Решење:

Запишимо дати израз у облику:

$$\begin{aligned}
&(2-k+4k^2+\frac{5k^2-6k+3}{k-1}) : (2k+1+\frac{2k}{k-1}) = \\
&= \frac{2(k-1)-k(k-1)+4k^2(k-1)+5k^2-6k+3}{k-1}) : (\frac{2k(k-1)+k-1+2k}{k-1}) = \\
&= \frac{2k-2-k^2+k+4k^3-4k^2+5k^2-6k+3}{2k^2-2k+k-1+2k} = \\
&= \frac{4k^3-3k+1}{2k^2+k-1} = \\
&= \frac{(2k-1)(2k^2+k-1)}{2k^2+k-1} = \\
&= 2k-1
\end{aligned}$$

за свако $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ што је и требало показати.

8. Ако је $a+b+c=0$, доказати да важи $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Решење: Из услова задатка следи $a+b=-c$. Одатле се кубирањем добија ланац еквиваленција:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3=-c^3 &\iff a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3 \\
&\iff a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b) \\
&\iff a^3+b^3+c^3=3abc,
\end{aligned}$$

а ово је и требало показати.

9. Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $x^3-3x+1=0$, одредити вредност израза $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

Решење:

Подсетимо се да нам Вијетове формуле кажу да, ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$, онда важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_1} \\
&x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_3}{a_1} \\
&x_1x_2x_3=-\frac{a_4}{a_1}.
\end{aligned}$$

Ако је x_1 решење једначине $x^3-3x+1=0$, онда је:

$$\begin{aligned}
&x_1^3-3x_1+1=0 / \cdot x_1 \\
\Rightarrow &x_1^4-3x_1^2+x_1=0 \\
\Rightarrow &x_1^4=3x_1^2-x_1
\end{aligned}$$

Аналогно, за решења x_2 и x_3 важи $x_2^4 = 3x_2^2 - x_2$ и $x_3^4 = 3x_3^2 - x_3$, па је:

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 &= 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= 3[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] - (x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

На основу Вијетових формула за дату кубу једначину имамо:

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3$.

Из претходног следи да је $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3 \cdot (-2)(-3) = 18$.

10. Одредити збир коефицијената у развоју $(\frac{1}{2} - 4x + 4x^3)^{274} \cdot (6x^4 - 6x + 2)^{275}$.

Решење:

У општем случају, ако је дат полином:

$P_m(x) = a_0x^n + ax^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,
за $x = 1$ добијамо збир коефицијената $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

У нашем случају збир коефицијената је:

$(\frac{1}{2} - 4x + 4x^2)^{274} \cdot (6x^4 - 6x + 2)^{275} |_{x=1} = \frac{1}{2^{274}} \cdot 2^{275} = 2.$