Математички факултет Београд

Семинарски рад

Подударност троуглова

Студенти
Петаков Сандра 51/2011
Смиљанић Милина 138/2011
Смиљковић Аница 112/2011
Тановић Милица 13/2011
Урошевић Јасминка 79/2011
Дарко Чучак 16/2011

Професор
др Небојша Икодиновић

Београд,
јануар 2016 г.

1 Изометријске трансформације

У овом раду E^3 обележава модел Еуклидске геометрије, т.ј простор који задовољава аксиоме припадности, распореда, подударности, непрекидности и Плејферову аксиому паралелности. Такође, E^2 обележава Еуклидску раван и E^1 Еуклидску праву. Основне релације у Еуклидском простору су, поред припадности, трочлана релација распореда β и четворочлана релација подударности коју интерпретирамо као подударност парова тачака $(A, B) \cong (C, D)$.

Геометријска фигура је било који непразан подскуп простора. Занимљиве геометријске фигуре су равни, праве, полуправе, дужи, углови, полигони, троуглови … Интуитивно, две фигуре су подударне ако их неким кретањем у можемо довести до поклапања. У складу са тим, наводимо следећу дефиницију кретања:

Дефиниција 1.1. Пресликавање $\sigma : E^n \to E^n,\ n \in \{1, 2, 3\}$, које је бијекција и које сваке две тачке A и B простора E^n пресликава у тачке A' и B' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ назива се изометријском трансформацијом или изометријом простора E^n.

Дакле, можемо говорити о изометријским трансформацијама праве, равни и простора. На пример, неке од изометријских трансформација равни су осна симетрија, ротација и транслација. Наиме, појмови подударности дужи, углова и фигура уопште дефинишу се помоћу општег појма изометрије.

Дефиниција 1.2. Две фигуре Φ_1 и Φ_2 су подударне, у ознаци $\Phi_1 \cong \Phi_2$, ако постоји изометрија σ која пресликава Φ_1 у Φ_2, тј. важи $\sigma(\Phi_1) = \Phi_2$.

Пример изометрије је идентично пресликавање $\varepsilon : E^n \to E^n$ које сваку тачку A пресликава у њу саму, тј. важи $\varepsilon(A) = A$. Ово пресликавање назива се коинциденцијом. Наредним теоремама су дата два важна својства изометрија.

Теорема 1.3. а) Коинциденција простора E^n је изометријска трансформација тог простора.
б) Композиција две изометрије простора E^n је такође изометрија.
ц) Ако је σ изометрија простора E^n тада је и њена инверзна трансформација изометрија простора E^n.

Теорема 1.4. Ако изометрија простора E^n пресликава неке три тачке A, B и C у тачке A', B' и C' и ако је $\beta(A, B, C)$ онда је $\beta(A', B', C')$.

На основу претходне теореме, важи следеће :

Последица 1. а) Изометрија пресликава колинеарне тачке у колинеарне тачке.
б) Изометријска трансформација пресликава: праву у праву; дуж у дуж; полуправу у полуправу; полураван у полураван; угао у угао; n-тоугао у n-тоугао.

Теорема 1.5. Нека су A, B, A', B' тачке еуклидске праве E^1 такве да је $(A, B) \cong (A', B')$. Тада постоји јединствена изометрија $\sigma : E^1 \to E^1$ која тачке A и B пресликава редом у тачке A' и B'.

Дефиниција 1.6. Тачка A је фиксна или инваријантна тачка изометрије $\sigma : E^n \to E^n,\ n \in \{1, 2, 3\}$ ако је $\sigma(A) = A$.

И појам фиксних тачака је веома битан, посебно у класификацији изометрија, како код изометрија праве тако и код изометрија равни. Лако се показује да је изометрија праве са бар две фиксне тачке коинциденција. Одатле важи да изометрија која није коинциденција не може имати више од једне фиксне тачке (изометрије са тачно једном фиксном тачком су централне симетрије на правој, а оне без иједне су транслације). Међутим, код изометрије еуклидских равни ситуација је знатно компликованија. Аналогно изометрији праве, изометрија равни која има бар три фиксне неколинеарне тачке је коинциденција.

Теорема 1.7. Нека су A, B, C и A', B', C' две тројке неколинеарних тачака равни E^2 такве да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$, т.ј одговарајући парови тачака су подударни. Тада постоји јединствена изометрија равни која тачке A, B и C пресликава редом у тачке A', B' и C'.

2 Подударности дужи и углова

Појам подударности дужи проистиче из уопштене дефиниције подударности фигура дате у дефиницији 1.2 (јер дуж сматрамо фигуром). Разматрањем појма подударности пара тачака интуитивно добијамо представу да се ради о подударности одговарајућих дужи. То потврђује следећа теорема.

Теорема 2.1. $(A, B) \cong (A', B')$ ако и само ако $AB \cong A'B'$.

Помоћу појма подударности дужи дефинишимо појам средишта дужи.

Дефиниција 2.2. Тачка S је средиште дужи AB ако припада тој дужи и ако је $AS \cong SB$.

Важи теорема да свака дуж има јединствено средиште.

Дефиниција 2.3. Дуж AB је мања од дужи CD у ознаци $AB < CD$ ако унутар дужи CD постоји тачка E таква да је $AB \cong CE$. Дуж EF једнака је збиру дужи AB и CD у ознаци $EF = AB + CD$ ако унутар дужи EF постоји тачка G таква да је $AB \cong EG$ и $CD \cong GF$.

Дефиниција 2.4. Два конвексна или конкавна угла pOq и $p'O'q'$ су подударна ако и само ако на крацима p, q, p', q' редом постоје тачке P, Q, P' и Q' такве да је : $(P, O, Q) \cong (P', O', Q')$.

Такође важи да су унакрсни углови подударни.

Теорема 2.5. За сваки угао $\angle pOq$ и сваку полуправу p' са теменом S неке равни постоји у полуравни одређеној правом која садржи p' јединствена полуправа q' таква да је $\angle pOq \cong \angle p'Sq'$.

Аналогно дефиницијама средишта дужи, релације $<$ и збира дужи, користећи подударност, уводе се и одговараајући појмови за углове: симетрала угла, релација $<$ и збир углова.

Дефиниција 2.6. Полуправа s са почетном тачком O, која припада углу pOq и таква да је $\angle pOs \cong \angle sOq$ назива се бисектрисом угла pOq. Права која садржи ту полуправу назива се симетралом тог угла. Угао AOB је мањи од угла CSD у ознаци $\angle AOB < \angle CSD$ ако унутар угла CSD постоји полуправа SE таква да је $\angle AOB \cong \angle CSE$. Угао pOq је збир углова aSb и $a'S'b'$ у ознаци $pOq = aSb + a'S'b'$ ако у углу pOq постоји полуправа r са почетном тачком O тако да је $\angle pOr \cong \angle aSb$ и $\angle rOq \cong \angle a'S'b'$.

Дефиниција 2.7. За конвексни угао каже се да је прав, оштар или туп у зависности од тога да ли је он подударан, мањи од, или већи од свог напоредног угла. Два угла су суплементни ако је њихов збир опружен угао, а комплементни ако је њихов збир прав угао.

Теорема 2.8. Прави углови су међусобно подударни. Угао подударан неком правом углу је такође прав угао.

Дефиниција 2.9. Ако праве p и q садрже редом краке OP и OQ неког правог угла POQ, тада кажемо да је права p управна (или нормална) на правој q у ознаци $p \perp q$.

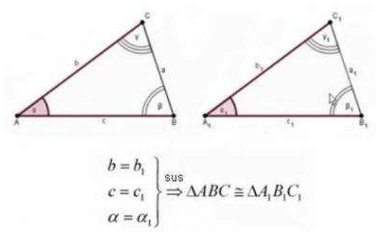
Теорема 2.10. За сваку праву p и сваку тачку A неке равни постоји јединствена права n у тој равни која садржи тачку A и управна на правој p.

3 Подударност троуглова

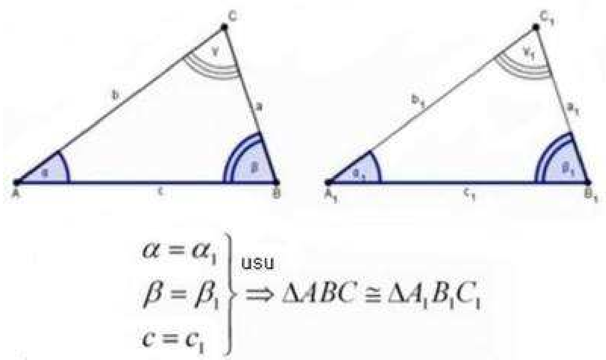
На основу опште дефиниције подударности фигура можемо закључити да су два троугла подударна ако постоји изометрија која један троугао пресликава у други. Међутим, то није баш лако успоставити. Како изометрија чува распоред, јасно је да ако су два троугла подударна, тада су подударне и одговарајуће ивице и одговарајући углови. Потребно је разматрати обрнут случај: који су од услова подударности одговарајућих ивица и углова довољни да два троугла буду подударна. Одатле су настали и основни ставови о подударности троуглова и има их укупно четири. У овим ставовима се претпоставља да су троуглови у истој равни (а ако нису, важи исто, само још треба обратити пажњу на својства изометрије простора).

Занимљивост Други став се приписује Талесу из Милета, док се остали приписују Питагори са Самоса.

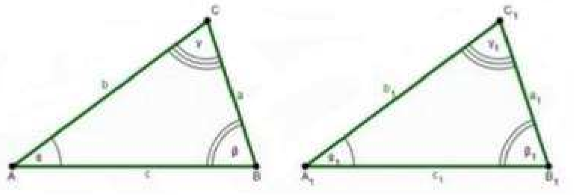
Став 1 (СУС : Страница - Угао - Страница) Два троугла су подударна ако су две ивице и њима захваћен угао једног троугла подударни са одговарајућим ивицама и углом другог троугла.



Став 2 (УСУ : Угао - Страница - Угао) Два троугла су подударни ако су једна ивица и на њој налегли углови једног троугла подударни са одговарајућом ивицом и на њој налеглим угловима другог троугла.



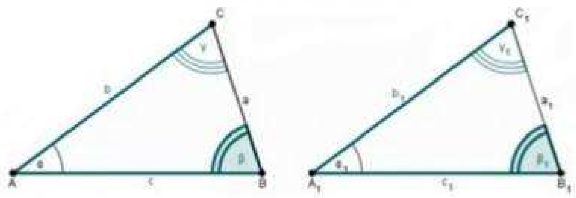
Став 3 (ССС : Страница - Страница - Страница) Два троугла су подударна ако су им одговарајуће ивице подударне.



$$\left.\begin{array}{l} a = a_1 \\ b = b_1 \\ c = c_1 \end{array}\right\} \overset{\text{sss}}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

Доказаћемо овај став. Нека су ABC и $A_1B_1C_1$ два троугла таква да је $AB \cong A_1B_1$ и $BC \cong B_1C_1$ и $AC \cong A_1C_1$. Другачији запис овога је $(A, B, C) \cong (A_1, B_1, C_1)$. Тада према теореми 2.10 постоји изометрија σ те равни таква да тачке A, B и C редом пресликава у тачке A_1, B_1, C_1. Како изометрија чува распоред, она пресликава ивице једног троугла у одговарајуће ивице другог троугла. На основу тога, изометрија σ пресликава троугао ABC у троугао $\triangle A_1B_1C_1$, па је $ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Став 4. (ССУ : Страница - Страница - Угао) Два троугла су подударна ако су две странице и угао наспрам једне од њих једног троугла подударни са одговарајућим ивицама и одговарајућим углом другог троугла, а углови наспрам других двеју ивица су или оба оштра или оба права или оба тупа.



$$\left.\begin{array}{l} b = b_1 \\ c = c_1 \\ \beta = \beta_1 \\ \gamma, \gamma_1 \text{ su iste vrste} \end{array}\right\} \overset{\text{ssu}}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

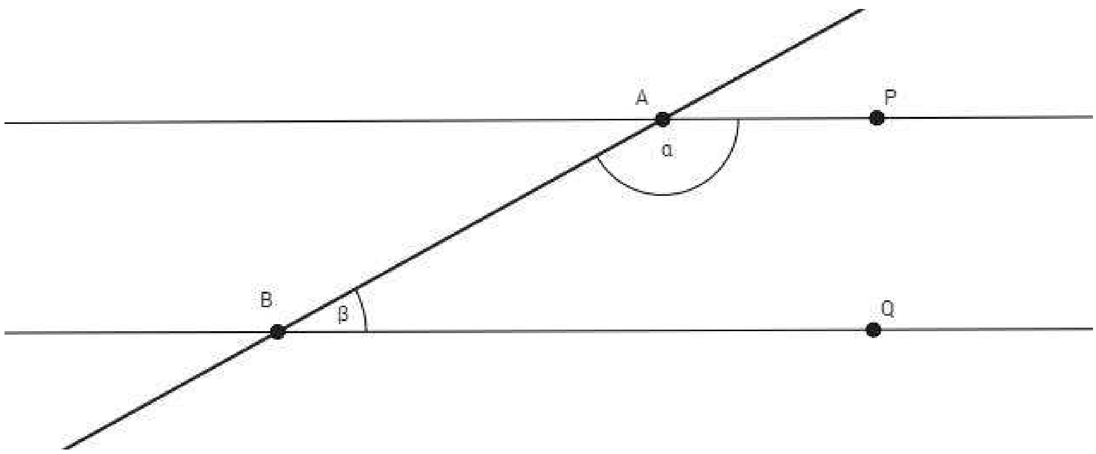
Лема 3.1. Наспрам подударних ивица неког троугла су подударни углови и обратно, наспрам подударних углова троугла су подударне ивице.

4 Примене подударности троуглова

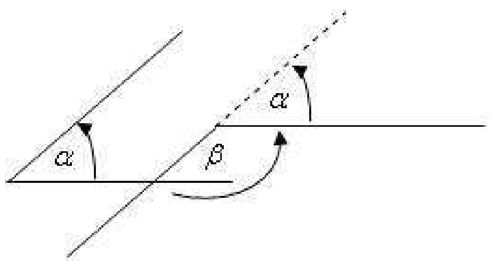
Подударност троуглова је веома значајна и из ње проистичу доста последица које данас сматрамо елементарним. Њеном једноставном применом могу се поједноставити многи компликовани проблеми. Навешћемо неке њене примене.

Теорема 4.1. Нека су A, B, P, Q четири тачке неке равни такве да су P и Q са исте стране праве која садржи тачке A и B. Тада важи: $AP \parallel BQ \Leftrightarrow \angle PAB + \angle QBA = 180°$.

Углови на трансверзали су углови које образује права која сече две различите праве неке равни. Та права се зове трансверзала.



Теорема 4.2 (О угловима са паралелним крацима)). Нека су pOq и p'Oq' два конвексна угла неке равни са крацима таквим да је $p \parallel p'$ и $q \parallel q'$. Тада важи да ако су оба угла оштра или оба угла тупа да су онда подударни, а ако је један оштар, а други туп онда су суплементни.

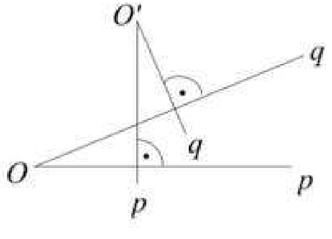


Једна од најважнијих примена подударности троуглова огледа се у следећој теореми:

Теорема 4.3. Збир унутрашњих углова у троуглу једнак је опруженом углу.

Последице ове теореме говоре о односу спољашњих и унутрашњих углова и гласе: спољашњи угао неког троугле једнак је збиру несуседних унутрашњих углова тог троугла. И друга: спољашњи угао неког троугла већи је од сваког несуседног унутрашњег угла тог троугла.

Теорема 4.4 (О угловима са нормалним крацима). Нека су pOq и p'O'q' два конвексна угла неке равни са крацима таквим да је $p \perp p'$ и $q \perp q'$. Тада важи да ако су оба угла оштра или оба угла тупа да су онда подударни, а ако је један оштар а други туп онда су суплементни.



Теорема 4.5 (Неједнакост троугла). Наспрам веће ивице у троуглу је већи угао тог троугла; и обратно, наспрам већег угла је већа ивица. Збир две ивице троугла већи је од треће.

Сада ћемо се усмерити на четвороуглове.

Дефиниција 4.6. Четвороугао $ABCD$ је трапез ако је $AB \parallel CD$. Ивице AB и CD су основице, а BC и AD су краци тог трапеза. Трапез је једнакокраки ако је $BC \cong AD$ и није $BC \parallel AD$, а правоугли је ако је један од унутрашњих углова прав. Четвороугао $ABCD$ је паралелограм ако је $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Четвороугао код кога су све ивице подударне зове се ромб. Четвороугао код кога су сви унутрашњи углови подударни и једнаки 90° зове се правоугаоник. Четвороугао код кога су све ивице подударне и сви унутрањи углови подударни је квадрат.

Теорема 4.7. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао. Тада су следећи искази еквивалентни:

а) Четвороугао $ABCD$ је паралелограм;

б) Свака два суседна унутрашња угла четвороугла су суплементни углови;

в) Парови наспрамних углова четвороугла су подударни углови;

г) $AB \parallel CD$ и $AB \cong CD$;

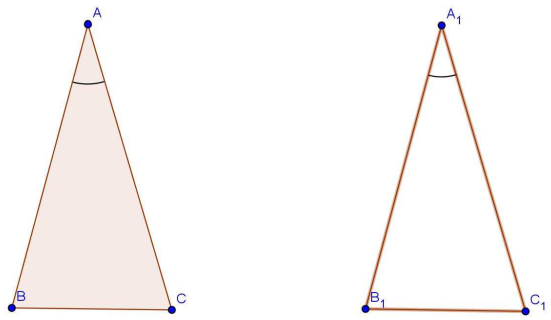
д) $AB \cong CD$ и $AD \cong BC$;

ђ) Дијагонале четвороугла се узајамно полове, тј. дужи AC и BD имају заједничко средиште.

Навешћемо неколико примера за подударност троуглова.

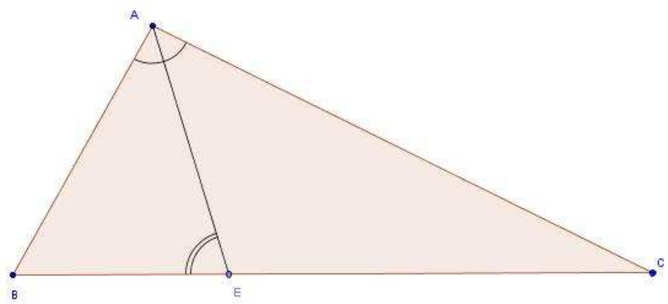
Пример 1. Два једнакокрака троугла су подударна ако су им подударне основице и углови наспрам њих.

Решење. Нека су ABC и $A_1B_1C_1$ два једнакокрака троугла са подударним основицама BC и B_1C_1 и таква да је $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$.



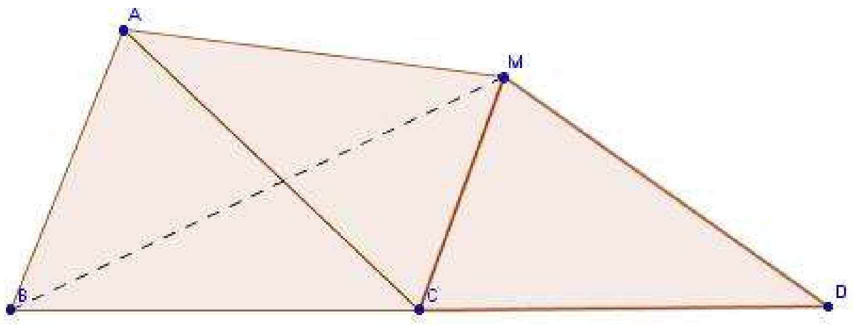
На основу леме 3.1 важи $\angle ABC \cong \angle ACB$ и $\angle A_1B_1C_1 \cong \angle A_1C_1B_1$. Збир углова у троуглу је 180°, па је : $\angle ABC \cong \angle ACB \cong \angle A_1B_1C_1 \cong \angle A_1C_1B_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$. Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су подударни на основу става УСУ ($BC \cong B_1C_1, \angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1, \angle ACB \cong \angle A_1C_1B_1$). $\square$

Пример 2. Ако је E пресечна тачка бисектрисе унутрашњег угла тог троугла код темена A и ивице BC, показати да је $AB > BE$ и $AC > CE$.



Решење. Како је $\beta(B, E, C)$, угао AEB је спољашњи угао троугла AEC, па је $\angle BEA > \angle EAC \cong \angle BAE$. Наспрам већег угла је већа страница, тј. $AB > BE$. Угао CEA је спољашњи угао троугла BEA, па је већи од угла EAB, односно EAC. Наспрам већих углова су веће странице, па је $AC > CE$. $\square$

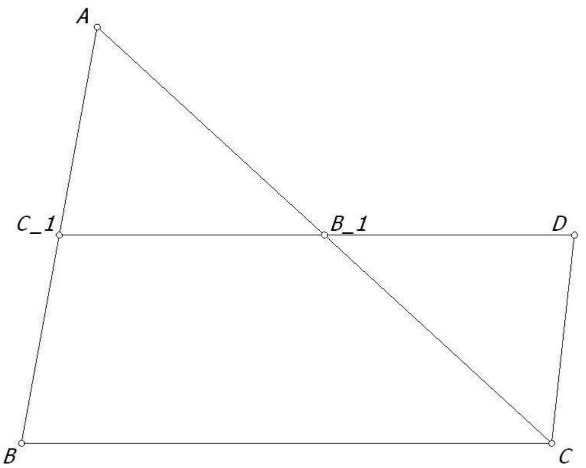
Пример 3. Нека је M произвољна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена C троугла ABC. Доказати да је $MA + MB \geq CA + CB$.



Решење. Нека је D тачка полуправе BC таква да је $AC \cong CD$ и $B(B, C, D)$. Тада је $BD = CA + CB$. На основу става СУС ($AC \cong DC, CM \cong CM, \angle ACM \cong \angle DCM$) троуглови ACM и DCM су подударни. Одатле је $MA \cong MD$. Примењујући неједнакост троугла на троугао MBD је : $MA + MB = MD + MB \geq BD = CA + CB$. Једнакост важи и када су тачке B, M и D колинеарне, тј. $M = C$. $\square$

Пример 4. Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и AB редом троугла $\triangle ABC$,онда важи $BC \parallel B_1C_1$ и $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

Решење. Пошто је тачка B_1 средиште дужи CA и тачка C_1 је средиште дужи AB, нека је D тачка таква да је D у односу на B_1 симетрична C_1.

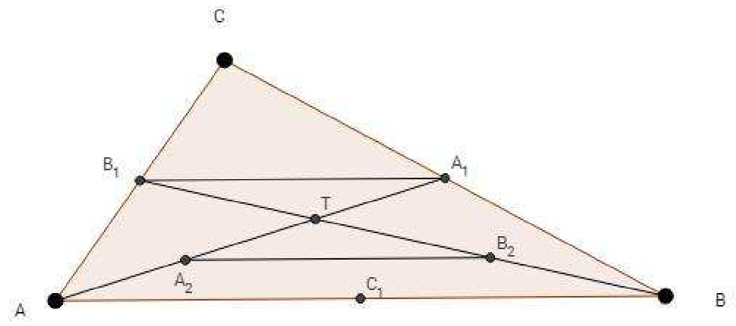


Угао $\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle CB_1D$ као унакрсни углови, па је $C_1B_1 = DB_1$ јер је D тачка која је у односу на B_1 симетрична на C_1, и $AB_1 = B_1C$ јер је B_1 средиште дужи CA.На основу теореме сус следи да је $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle CB_1D$. Такође,пошто је тачка C_1 средиште дужи AB одакле следи да је $AC_1 = C_1B$ и $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle CB_1D$ одакле следи да је $AC_1 = CD$,на основу тога следи да је $BC_1 = CD$.$\triangle AB_1C_1 \cong \triangle CB_1D$ одавде следи да је

$\sphericalangle BAB_1 = \sphericalangle DCB_1$ као подударни углови и краци AB_1 и CB_1 су на истој правој,то јест то су углови са паралелним крацима јер су B и D са различитих страна AC, $AB \parallel CD$, тј. $BC_1 \parallel CD$. Из претходног имамо да је $BC_1 = CD$ и да је $BC_1 \parallel CD$,па из тога следи да је $BCDC_1$ паралелограм. Из чега следи да је $BC \parallel B_1C_1$ и $BC = C_1D$.Пошто је B_1 средиште C_1D онда $C_1B_1 = B_1D = \frac{1}{2}C_1D = \frac{1}{2}BC$, тј. $C_1B_1 = \frac{1}{2}BC$. □

Пример 5. Доказати да се тежишне дужи троугла секу у тачки која сваку од њих дели у односу 2:1.

Решење. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, AC, AB редом и нека је $\{T\} = AA_1 \cap BB_1$



Тачке A_2 и B_2 су средишта страница AT и BT, Како је B_1A_1 средња линија $\triangle ABC$ тада

$$B_1A_1 \cong \frac{1}{2}AB; B_1A_1 \parallel AB$$

Исто тако A_2B_2 је средња линија $\triangle ABT$, па је:

$$A_2B_2 \parallel AB A_2B_2 \cong \frac{1}{2}AB$$

Зато следи да је: $A_2B_2 = B_1A_1$ и $A_2B_2 \parallel B_1A_1$.

Углови $\angle B_1TA_1 \cong \angle B_2TA_2$ су унакрсни, а $\angle B_1A_1T \cong \angle B_2A_2T$ су углови са паралелним крацима, а важи и $A_2B_2 \cong B_1A_1$. По ставу UUS следи да ће $\triangle A_1B_1T \cong \triangle A_2B_2T$ Из $A_2T \cong A_1T$ и $A_2 = S(AT)$ следи $A_2T = \frac{1}{2}AT$ закључујемо да : $A_1T \cong \frac{1}{2}AT$, тј. $AT : TA_1 = 2:1$. Имамо из подударности $\triangle A_1B_1T \cong \triangle A_2B_2T$ и следеће: $B_2T \cong B_1T$ и Из $B_2 = S(BT)$ следи $B_2T \cong \frac{1}{2}BT$, па важи релација $BT : TB_1 = 2:1$.

Аналогно се доказује и за тачку $\{T'\}$ ı $AA_1 \cap CC_1$ да важи:

$$AT' : T'A_1 = 2:1$$

$$CT' : T'C_1 = 2:1$$

Тачка на дужи AA_1 која је дели у размери 2:1 је јединствена, у супротном имамо:

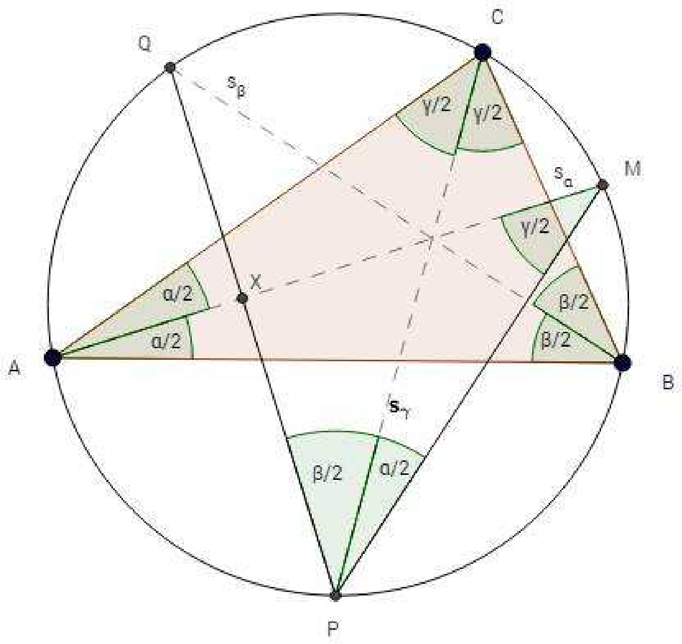
$$AT : TA_1 = 2:1$$

$$AT' : T'A_1 = 2:1,$$

одакле следи $T \equiv T'$. Дакле, $\{T\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$ и $AT : TA_1 = BT : TB_1 = CT : TC_1 = 2:1$ □

Пример 6. Нека су P и Q средишта лукова $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ круга описаног око $\triangle ABC$, s_α симетрала угла $\angle BAC$. Доказати $PQ \perp s_\alpha$.

Решење. Обележимо углове $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$, и нека је k описан круг око троугла ABC.



Нека је $M \in k \cap s_\alpha$ таква да је $M \neq A$. Како је P средиште лука AB важи $\widehat{AP} \cong \widehat{PB}$ $\angle ACP = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$. Исто и за Q : $\angle CBQ = \angle QBA = \frac{\beta}{2}$ $\angle CAM = \angle MAB = \frac{\alpha}{2}$.

Нека је $\{X\} = PQ \cap s_\alpha$ и знамо да су: $\angle AMP = \frac{\gamma}{2}$ - периферијски угао над $\widehat{AP}$
$\angle CPM = \frac{\alpha}{2}$ - периферијски угао над $\widehat{CM}$
$\angle CPQ = \frac{\beta}{2}$ - периферијски угао над $\widehat{CQ}$

Збир углова у троуглу $\triangle PXM$, а знамо да важи $\angle PXM + \angle XPM + \angle PMX = \pi$. $\angle PXM + (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) + \frac{\gamma}{2} = \pi$. Добијамо да $\angle PXM = \pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Зато што је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ збир углова у троуглу $\triangle ABC$.

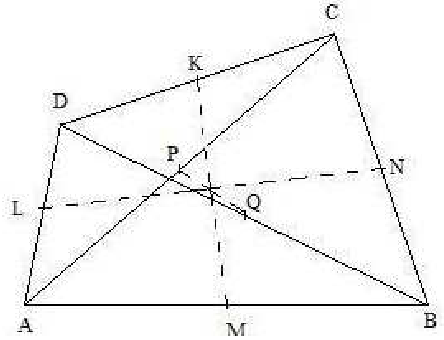
Дакле, $PX \perp XM \Rightarrow PQ \perp s_\alpha$ $\square$

Пример 7. Ако су A, B, C, D, четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:

а) $MN \cong KL$, $MP \cong QK$, $NP \cong QL$;

б) LN, MK и PQ имају заједничко средиште;

в) сваки од углова $\sphericalangle PMQ$, $\sphericalangle PNQ$, $\sphericalangle LMN$ подударан је једном од углова који одређују праве AC и BD, BC и AD, AB и CD.



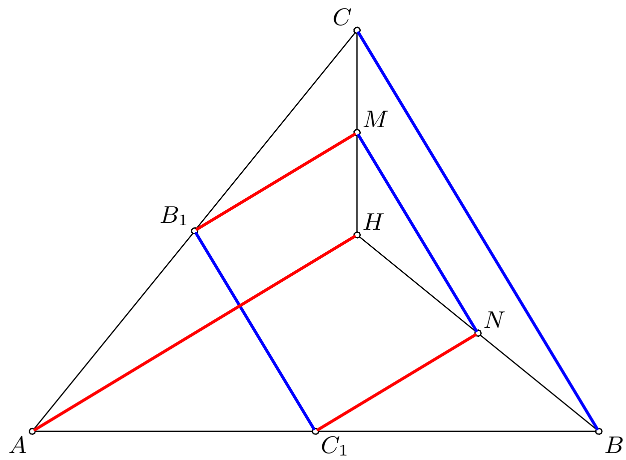
Решење. а) Пошто је тачка M средиште дужи AB и тачка N је средиште дужи AB, MN је средња линија $\triangle ABC$, па је $MN = \frac{1}{2}AC$ и $MN \parallel AC$. Такође, пошто је тачка L средиште дужи AD и тачка K је средиште дужи DC, LK је средња линија $\triangle ACD$, па је $LK = \frac{1}{2}AC$ и $LK \parallel AC$. Одатле следи да је $MN \parallel LK$ и да је $MN = LK$. Слично су MP и QK средње линије $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ редом, па је $MP = QK = \frac{1}{2}BC$, као што су и NP и QL средње линије $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ редом, па је $NP = QL = \frac{1}{2}AB$.

б) Пошто је $MN \parallel LK$ и $MN = LK$, следи да је $MNKL$ паралелограм, па му се дијагонале полове. Нека је тачка X дата као тај пресек дијагонала: $\{X\} = MK \cap LN$ па је тачка X средиште дужи MK и LN. Такође је и $MQKP$ паралелограм јер је $MP \parallel QK$ и $MP = QK$, па му се дијагонале полове. Нека је тачка Y дата као тај пресек дијагонала: $\{Y\} = MK \cap PQ$ па је тачка Y средиште дужи MK и PQ. Како је средиште дужи MK јединствено, онда је $X \cong Y$, па се дужи LN, MK и PQ секу у истој тачки која им је притом средиште.

в) Пошто је MP средња линија $\triangle ABC$, онда је $MP \parallel BC$ и пошто је MQ средња линија $\triangle ABD$, онда је $MQ \parallel AD$, следи да су $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle(BC, AD)$ једнаки као углови са паралелним крацима. Слично, пошто је NP средња линија $\triangle ABC$, онда је $NP \parallel AB$ и пошто је NQ средња линија $\triangle BCD$, онда је $NQ \parallel CD$, следи да су $\sphericalangle PNQ = \sphericalangle(AB, CD)$ једнаки као углови са паралелним крацима. Слично, пошто је ML средња линија $\triangle ABD$, онда је $ML \parallel BD$ и пошто је MN средња линија $\triangle ABC$, онда је $MN \parallel AC$, следи да су $\sphericalangle LMN = \sphericalangle(BD, AC)$ једнаки као углови са паралелним крацима. $\square$

Пример 8. Нека је H ортоцентар троугла ABC. Ако су C_1, B_1, M, N, средишта дужи AB, AC, HC, HB, доказати да је четвороугао B_1C_1MN правоугаоник.

Решење. Нека су тачке B_1 и C_1 средишта страница AC и AB, тачка H ортоцентар троугла, а тачке N и M средишта дужи BH и CH.



Посматрајмо дужи B_1C_1 и MN. Како су B_1 и C_1 средишта страница AC, AB, те је B_1C_1 средња линија троугла $\triangle ABC$. Зато је

$$B_1C_1 \parallel CB \text{ и } B_1C_1 = \tfrac{1}{2}CB.$$

Слично, дуж MN је средња линија троугла $\triangle HBC$, па је

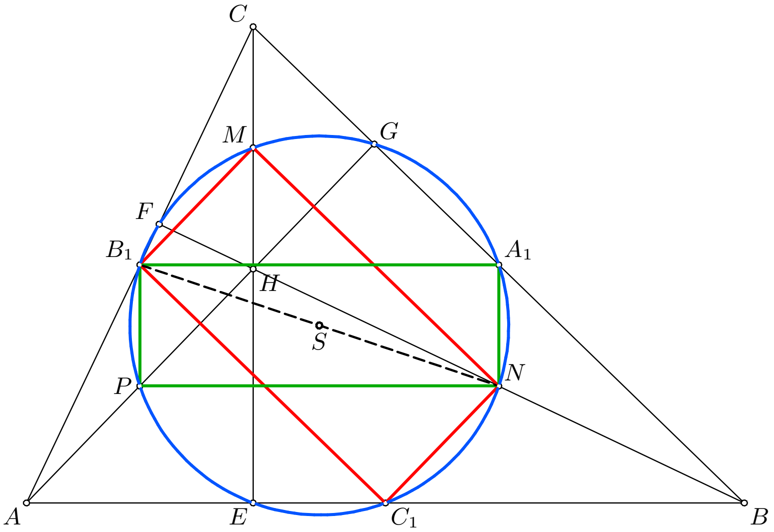
$$MN \parallel CB \text{ и } MN = \tfrac{1}{2}CB.$$

Следи $B_1C_1 \parallel NM$ и $B_1C_1 = NM$, па је четвороугао B_1C_1MN паралелограм.

Дуж C_1N је средња линија троугла $\triangle BAH$, па је $C_1N \parallel AH$. Такође је $AH \perp BC$, зато што је H ортоцентар $\triangle ABC$. Из $C_1N \parallel AH$ и $AH \perp BC$ следи $C_1N \perp CB$, па због $B_1C_1 \parallel CB$ следи $C_1N \perp B_1C_1$, т.ј. паралелограм B_1C_1MN је правоугаоник. $\square$

Пример 9. Доказати да средишта ивица, подножја висина и средишта дужи одређених ортоцентром и теменима произвољног троугла припадају једном кругу.

Решење. Нека су тачке A_1, B_1, C_1 средишта ивица BC, AC, AB, а тачке E, G, F су подножја висина над AB, BC, AC. Тачке P, N, M су средишта дужи AH, BH, CH, где је H ортоцентар троугла $\triangle ABC$.

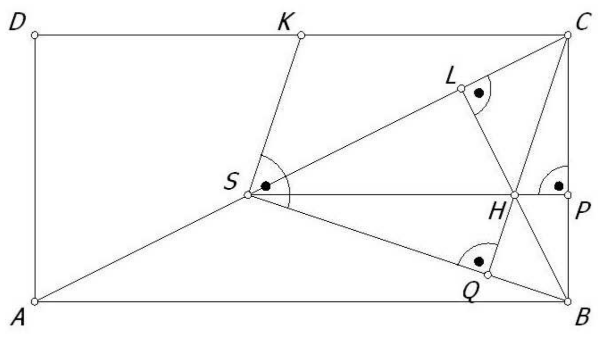


Четвороуглови B_1C_1MN и B_1A_1PN су правоугаоници према претходном задатку. Пошто је B_1N њихова заједничка дијагонала, они имају заједнички описан круг k са пречником B_1N, јер важи да је угао над пречником прав.

Остало је да докажемо да тачке E, G, F припадају k. Како је F подножје висине, $\angle NFB_1$ је прав, па тачка F припада кругу над пречником NB_1, а то је круг k. Према томе, тачка F припада кругу k. Слично се доказује да тачке E и G припадају кругу k, који се зове Ојлеров круг или круг девет тачака троугла ABC. $\square$

Пример 10. Нека је K средиште ивице CD правоугаоника $ABCD$ и L подножје нормале из темена B на дијагонали AC. Ако је S средиште дужи AL, доказати да је угао KSB прав.

Решење.



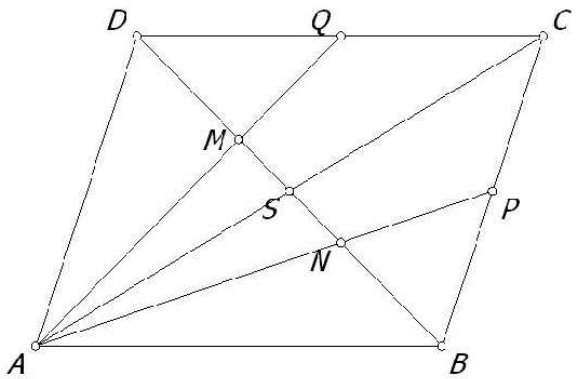
Нека је тачка P подножје нормале из тачке S на ивици BC правоугаоника $ABCD$. Тада је тачка $H = BL \cap SP$ ортоцентар троугла CSB, због тога је $CH \perp SB$. Приметимо да је SH средња линија троугла LAB, због тога што је $SH \parallel AB$ и S средиште дужи AL, па је:

$$SH = \frac{1}{2}AB = KC; \; SH \parallel AB \parallel KC$$

Према томе, четвороугао $SHCK$ је паралелограм. Одатле следи да је $CH \parallel KS$, како је $CH \perp SB$ мора бити $KS \perp SB$. □

Пример 11. Ако су P и Q средишта ивица BC и CD паралелограма $ABCD$, доказати да дужи AP и AQ деле дијагоналу BD паралелограма на три подударне дужи.

Решење. Нека су $M = DB \cap AQ$, $N = DB \cap AP$ и $S = AC \cap BD$. Тачка S је средиште дијагонала AC и BD паралелограма $ABCD$.



Посматрајмо троугао ACD. Како је Q средиште дужи CD и S средиште дужи AC, то су AQ и DS тежишне дужи. Тачка M је тежиште троугла ACD, и оно дели тежишну дуж DS у односу

$$DM : MS = 2 : 1$$

Аналогно, тачка N је тежиште троугла ABC, и оно дели тежишну дуж BS у односу

$$BN : NS = 2 : 1$$

Како је $DS \cong SB$, то је $DM = BN = MN = \frac{2}{3}DS$. □