Matematički fakultet

Metodika nastave matematike i računarstva

Nizovi

Autori:
Nikola Ninkov
Nikola Milev
Anamaria Piri
Ljubica Aćimović
Milica Selaković
Katarina Jelesijević

Profesor:
Dr Nebojša Ikodinović
Asistent:
Dr Tanja Stojadinović

1 Uvod

Nizovi se pojavljuju na raznim mestima u matematici.
Možemo da pričamo o konačnim $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ i o beskonačnim nizovima $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$. Nekad tražimo opšti oblik niza $a_n =$? nekad sumu elemenata: $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$. Jedan niz možemo da zadamo listom elemenata, na rekurzivan ili direktan način ali nekad i posebnom logikom za koji nema formula. Na primer decimale broja pi ili prosti brojevi.

Mandelbrotov skup je skup komplesksnih brojeva c u kompleksnoj ravni, za koje važi da niz:

$$a_1 = c \tag{1}$$

$$a_n = a_{n-1}^2 + c \tag{2}$$

ne ide u beskonačnost (ograničen je ako posmatramo moduo komplesnog broja). Njihova slika je jedan fraktal (geometrijski lik koji se može razložiti na manje delove tako da je svaki od njih, makar približno, umanjena kopija celine)

Mandelbrotov skup

Nekad nizovi mogu da se pojave na raznim, neočekivanim mestima.

Aritmetički niz:
U aritmetičkom nizu važi da je $a_{n+1} - a_n = d, \forall n \in N$, gde d ne zavisi od rednog broja člana niza.
Izračunajmo opšti član niza:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = ... = a_1 + (n-1)d$$

Ako je S_n suma niza do n-tog člana, izračunajmo i nju:

$$S_n = a_1 + ... + a_n = a_1 + a_1 + d + ... + a_1 + (n-1)d$$

Pošto je $1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, imamo da je:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Dakle,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

i

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Geometrijski niz:
U geometrijskom nizu važi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall n \in N$, gde q ne zavisi od rednog broja člana niza.
Naravno, dati izraz nema smisla ako je $a_n = 0$. Međutim, ako je neki član niza 0, to ce biti i svi ostali.
Izračunajmo sada opšti član niza:

$$a_n = qa_{n-1} = ... = q^{n-1}a_1$$

Suma:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + ... + q^{n-1})$$

Izračunajmo prvo sumu

$$\sigma_n = 1 + q + ... + q^{n-1}$$

Pomnožimo datu jednakost sa $(1-q)$ (to će imati smisla samo ako $q \neq 1$, a u slučaju da $q = 1$, $S_n = a_1 + ... + a_1 = na_1$).

$$\sigma_n(1-q) = (1+q+...+q^{n-1})(1-q) = 1+q+...+q^{n-1} - q - q^2 - ... - q^n = 1 - q^n$$

Dakle, $\sigma_n(1-q) = 1 - q^n$, odakle sledi da je

$$\sigma_n = \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

Vratimo se na računanje sume niza, S_n:

$$S_n = a_1 \sigma_n = a_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

Fibonačijev niz

Još jedan rekuretno zadat niz je Fibonačijev niz. Njegov opšti član ćemo pronaći rešavajući diferencnu jednačinu drugog reda. O njima će biti reči u daljem školovanju, ovde samo navodimo osnovni primer.

Fibonačijev niz je niz kod koga je svaki član jednak zbiru prethodna dva, počevši od trećeg

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$x_{n+2} = x_{n+} + x_n$$

Datoj jednačini pridružujemo karakterističnu jednačinu:

$$t^2 = t + 1$$

Rešenja su $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Teorema 1 *(i) Ako su t_1 i t_2 rešenja karakteristične jednačine $t_2 = pt + q$ različita tada su određena 2 rešenja diferencnih jednačina sa*

$$x_n = t_1^n, y_n = t_2^n$$

pa opšte rešenje postaje

$$a_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n.$$

(ii) Ako je t_1 dvostruko rešenje diferencne jednačine tada su nizovi x_n i y_n dati sa

$$x_n = t_1^n, y_n = n t_1^n$$

pa opšti član postaje

$$a_n = (C_1 + nC_2) t_1^n.$$

A, prema prethodnoj teoremi , slučaj (i) (jer smo dobili dva različita rešenja $t_1 \neq t_2$) imamo sledeće:

$$x_n = C_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Iz prethodnih $x_1 = x_2 = 1$ sledi

$$1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

$$1 = C_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + C_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \tag{4}$$

Rešenje ovog sistema je $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Pa konačno dobijamo da je n-ti Fibonačijev broj

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Monotonost:
Za niz $(a_n)_{n\in N}$ kažemo da je:
rastući - ako $a_{n+1} > a_n, \forall n \in N$
neopadajući - ako $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in N$
nerastući - ako $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in N$
opadajući - ako $a_{n+1} < a_n, \forall n \in N$

Ograničenost:
Niz $(a_n)_{n\in N}$ je:
ograničen odozgo ako - $(\exists M \in R)(\forall n \in N)\, a_n \leq M$
ograničen odozdo ako - $(\exists m \in R)(\forall n \in N)\, a_n \geq m$

Konvergentnost:
Niz $(a_n)_{n\in N}$ je konvergentan ako: $(\exists a \in R)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \epsilon)$, u oznaci $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Teorema 2 *Ako je niz $(a_n)_{n\in N}$ monoton i ograničen, onda je konvergentan.*

Teorema 3 *Ako je niz $(a_n)_{n\in N}$ rastući i neograničen, onda je $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

2 Razni zadaci

Zadatak 1 *Data su dva niza prirodnih brojeva:*
$(p_n)_{n\in N} : p_{n+1} = 2p_n + 3q_n, p_1 = 2$
$(q_n)_{n\in N} : q_{n+1} = p_n + 2q_n, q_1 = 1$
Dokazati da je niz $\frac{p_n}{q_n}$ *konvergentan.*

Rešenje:
$p_1 = 2, p_2 = 2p_1 + 3q_1 = 7, p_3 = 2p_2 + 3q_2 = 26, ...$
$q_1 = 1, q_2 = p_1 + 2q_1 = 4, q_3 = p_2 + 2q_2 = 15, ...$
$\frac{p_1}{q_1} = 2, \frac{p_2}{q_2} = 1.75, \frac{p_3}{q_3} \approx 1.7333 > \sqrt{3} \approx 1.7320$
Dokažimo indukcijom da je $\sqrt{3}$ donje ograničenje za niz $\frac{p_n}{q_n}$.
[BI] $\frac{p_1}{q_1} = 2 > \sqrt{3}$
[IH] Pretpostavimo da je za $k = n$ tvrđenje tačno, tj. $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3}$.
[IK]$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2p_n+3q_n}{p_n+2q_n} = 1 + \frac{p_n+q_n}{p_n+2q_n} = 1 + \frac{\frac{p_n}{q_n}+1}{\frac{p_n}{q_n}+2} = 2 - \frac{1}{\frac{p_n}{q_n}+2} >_{IH} 2 - \frac{1}{\sqrt{3}+2} =$
$= 2 - \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{3}$
Pritom je :
$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n(2p_n+3q_n)-p_n(p_n+2q_n)}{q_n(p_n+2q_n)} = \frac{2p_nq_n+3q_n^2-p_n^2-2p_nq_n}{q_n(p_n+3q_n)} < 0$
što sledi iz prvog dela: $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{3} \longrightarrow p_n > \sqrt{3}q_n \longrightarrow p_n^2 > 3q_n^2$
Primenom teoreme 2, tvrđenje je dokazano.

Zadatak 2 *Dokazati da je* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *ako je* $(a_n)_{n\in N}$ *dat sa:* $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

Rešenje:
Primetimo da je niz a_n rastući (trivijalno) i posmatrajmo relacije:
$1 = 1$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
...
$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + ... + \frac{1}{2^{k+1}} > 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$
Saberimo sve relacije iznad, za proizvoljno $k \in N$ i $n = 2^{k+1}$. Dobijamo:
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} > 1 + \frac{k+1}{2}$, odakle sledi da je niz a_n neograničen. Tvrđenje sledi iz teoreme 3.

Zadatak 3 *U geometrijskom nizu* $a_m = k$, $a_n = l$. *Naći opšti član niza.*

Rešenje: Prvo, pretpostavićemo da $m \neq n$ jer, u suprotnom, nemamo dovoljno informacija. Takođe, pretpostavićemo da $k, l \neq 0$ jer je u tom slučaju niz konstantan i $a_n = 0, \forall n \in N$ Kako u geometrijskom nizu važi da je $a_n = q^{n-1}a_1$ i $a_m = q^{m-1}a_1$, to imamo $k = q^{n-1}a_1$ i $l = q^{m-1}a_1$. Ako podelimo l sa k: $\frac{l}{k} = \frac{q^{m-1}a_1}{q^{n-1}a_1} = q^{m-n}$ Odavde sledi da je q $= \sqrt[m-n]{\frac{l}{k}}$ Sada, da nađemo a_1: Pošto je $l = q^{m-1}a_1$, sledi da $a_1 = \frac{l}{q^{m-1}} = lq^{1-m} = l(\frac{l}{k})^{\frac{1-m}{m-n}} = \sqrt[m-n]{l^{m-n}}(\frac{l}{k})^{\frac{1-m}{m-n}} = \sqrt[m-n]{l^{m-n}l^{1-m}k^{m-1}} = \sqrt[m-n]{\frac{k^{m-1}}{l^{n-1}}}$

Dakle, $a_1 = \sqrt[m-n]{\frac{k^{m-1}}{l^{n-1}}}$ i $q = \sqrt[m-n]{\frac{l}{k}}$, pa se $a_p = a_1 q^{p-1}$ lako odatle dobija.

Zadatak 4 *Odrediti pravougle trouglove tako da merni brojevi stranica čine geometrijsku progresiju.*

Rešenje:

Neka su a, b, c merni brojevi stranica.
Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da važi $a < b < c$.
Kako je $q = \frac{c}{b}$ i $b = aq$, imamo $b = a\frac{c}{b}$, tj. $b^2 = ac$.
Kako je u pitanju pravougli trougao, važi Pitagorina teorema, pa imamo $c^2 = a^2 + b^2$.
Odatle sledi da je $c = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$, a $b = \frac{a}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{5})}$.
Dakle geometrijski niz je: $a, \frac{a}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{5})}, \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$,
a količnik geometrijskog niza $q = \frac{1}{\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}$.

Zadatak 5 *Naći sve aritmetičke progresije kod kojih je odnos zbir prvih n članova i zbira sledećih $2n$ članova ($n \in N$) konstanta nezavisna od n.*

Rešenje:
Po formuli za zbir aritmetičkog niza imamo da je $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d$ i da je $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{3n} = S_{3n} - S_n = 2na_1 + n(4n-1)d$.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{3n}} = \frac{na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d}{2na_1 + n(4n-1)d} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{4a_1 + 2(4n-1)d}$$

Ovaj izraz ne zavisi od n akko je $2a_1 + (n-1)d = c(4a_1 + 2(4n-1)d)$ za neko $c \in R$, tj.

$$(1-4c)dn = (2a_1 - d)(c-1)$$

A poslednja nejednakost je ispunjena za sve n ako i samo ako je

$$d(1-4c) = 0 \qquad (2a_1 - d)(c-1) = 0$$

Razmotrimo slučajeve:
-ako je $d = 0$ onda mora biti $a \neq 0$ (da ne bi imali deljenje nulom u polaznoj jednakosti) i onda je $c = 1$, odnosno to je niz $a_n = a \neq 0$ za svako n.
-Ako je $c = \frac{1}{4}$, biće $d = 2a_1$, pa dobijamo rešenje $a_n = (2n-1)a$, i $a \neq 0$ da ne bismo imali deljenje nulom.
Zakljucujemo da su tražena rešenja $a_n = a \neq 0$ i $a_n = (2n-1)a, \quad a \neq 0$

Zadatak 6 *Tri realna broja, različita od nule, obrazuju aritmetički niz, a kvadrati tih brojeva, u istom poretku, obrazuju geometrijski niz. Naći količnik tog geometrijskog niza.*

Rešenje
Neka su to brojevi a, b i c. Tada je $2b = a + c$ i $b^4 = a^2c^2$. Ako kvadriramo prvu jednačinu i iskoristimo da je $b^2 = |ac|$, dobijamo $a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|$.
Ako je $ac > 0$ dobijamo $a^2 - 2ac + c^2 = 0$, pa je $a = c$ i $a^2 = c^2$, odnosno $q_1 = 1$.
Ako je $ac < 0$ dobijamo jednakost $a^2 + 6ac + c^2 = 0$, uvodimo smenu $\frac{c}{a} = t$ i rešimo kvadratnu jednačinu $t^2 + 6t + 1 = 0$. Dobijamo da je $\frac{c}{a} = t_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8}$.
Kako je $\frac{c^2}{a^2} = q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$ i $q > 0$ (jer geometrijski niz čine kvadrati), bice $q_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}$.
Količnik tog niza moze biti $q_1 = 1$, $q_2 = 3 + \sqrt{8}$ i $q_3 = 3 - \sqrt{8}$.

Zadatak 7 *Neka je* $a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ *aritmetički niz. Dokazati da važi:*

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_0 a_1)^2}{4d}$$

gde je d *razlika niza.*

Rešenje:
Zadatak rešavamo matematičkom indukcijom.
Baza indukcije: tvrđenje je tačno za $n = 1$,

$$\frac{(a_1a_2)^2 - (a_1a_0)^2}{4d} = a_1^2 \frac{(a_2 - a_0)(a_2 + a_0)}{4d} = a_1^2 \frac{2d2a_1}{4d} = a_1^3$$

Indukcijska hipoteza: pretpostavimo da je tvrđenje tačno z $n = k$ $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_k^3 = \frac{(a_k a_{k+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d}$.
Indukcijski korak: za $n = k+1$ je $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{k+1}^3 = \frac{(a_k a_{k+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d} + a_{k+1}^3 = \frac{(a_k a_{k+1})^2 - (a_1 a_0)^2 + 4da_{k+1}^3}{4d} = \frac{a_{k+1}^2(a_k^2 + 4d(a_k + d)) - (a_1 a_0)^2}{4d} = \frac{a_{k+1}^2(a_k + 2d)^2 - (a_1 a_0)^2}{4d} = \frac{(a_{k+1} a_{k+2})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d}$ što je traženo tvrđenje za $k + 1$.
Stoga po principu matematičke indukcije tvrđenje zadatka važi za svaki prirodan broj n.

Zadatak 8 *(a) Da li postoji nekonstantan niz prirodnih brojeva* $a_1, a_2, ...$ *takav da za svako* $k \geq 2$ *važi* $a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}$ *?*
(a) Da li postoji nekonstantan niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_{2003}$ *takav da za svako* $2 \leq k \leq 2002$ *važi* $a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}$ *?*

Rešenje (a) Pretpostavimo da takav niz $(a_n)_{n \geq 1}$ postoji. Tada za niz $b_n = \frac{1}{a_n}$, na osnovu uslova zadatka važi $b_k = \frac{b_{k-1} + b_{k+1}}{2}$, pa je on aritmetička progresija, odnosno za neko $d \neq 0$ važi $b_n = b_1 + (n - 1)d$, za svako $n \in N$. Pa onda imamo da je za dovoljno veliko n b_n ili veći od 1 ili manji od 0, a sa druge strane, kako su brojevi a_n prirodni mora biti $0 < b_n \leq 1$, što je kontradikcija.

(b) Konačan niz ovih brojeva postoji. I sada samo ostaje da pronađemo primer u slučaju $n = 2003$.

$$a_n = \frac{2003!}{n}, \qquad 1 \leq n \leq 2003$$

Ostaje samo da proverimo da dati niz zadovoljava uslove zadatka. Kako je $a_k = \frac{2003!}{k} = \frac{\frac{2(2003!)^2}{(k-1)(k+1)}}{\frac{2k*2003!}{(k-1)(k+1)}} = \frac{2\frac{2003!}{k-1}\frac{2003!}{k+1}}{\frac{2003!}{k-1}+\frac{2003!}{k+1}} = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$

Zadatak 9 *Niz $(a_i)_{i\geq 1}$ definisan je sa:*

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}$$

Dokazati da su članovi niza celi brojevi.

Rešenje:
Pokazaćemo da ovaj niz ima jednu mnogo zgodniju rekuretnu vezu od ove kojem je zadat u zadatku. Prvih nekoliko članova niza su 1, 1, 3, 11, 41, 153 ...
Početna rekurentna formula je ekvivalentna sa $a_{n-2}a_n = a_{n-1}^2 + 2$. Ako umesto n uzmemo $n+1$ onda imamo jednakost $a_{n-1}a_{n+1} = a_n^2 + 2$. Odnosno drugačije zapisano imamo:

$$a_{n-2}a_n - a_{n-1}^2 = 2$$
$$a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = 2$$

Sada izjednačavanjem dobijamo:

$$a_{n-2}a_n + a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} + a_{n-1}^2$$

Ili lepše zapisano:

$$\frac{a_{n-2}a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n} = c$$

gde je c neka konstanta. Korsiteći početne uslove dobijamo da je $c = 4$. Odnosno da niz ima drugu rekurentnu formulu $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ i kako su $a_1 = a_2 = 1$ celi, i rekurenta formula je linearna onda su svi članovi niza celobrojni.

Zadatak 10 *Ispitati monotonost niza $(a_n)_{n\geq 1}$, koji je definisan sa:*

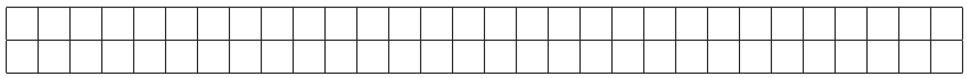
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}$$

Rešenje:
Posmatramo razliku dva susedna člana niza.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{9n+5}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} > 0$$

Pa zaključujemo da je niz rastući.

Zadatak 11 *Na koliko načina možemo da pokrijemo jedan pravougaonik dimenzije $2 \times n$ domino pločicama bez preklapanja istih i bez praznine na tabli? (Napomena: domino pločice su identične)*



Rešenje:

Kada su dva pokrivanja različita? Ako postoji bar 1 domino pločica koja je drugačije smeštena.
Jasno je da pozicija domino pločice ili vertikalna ili horizontalna, dodatno ako stavimo jednu pločicu u horizontalnom položaju, onda tačno iznad/ispod nje moramo staviti drugu takođe u horizontalnom položaju.
Prvo vredi posmatrati pravougaonike male dimenzije da bismo uočili neka pravila sa povećavanjem n-a. (n=1, 2, 3, 4, 5...)

Naime:
n=1: trivijalno
n=2: ili dve horizontalne pločice ili dve vertikalne pločice
n=3: ili tri vertikalne ili dve horizontalne i jedna vertikalna (na 2 načina)
n=4: ili 4 vertikalne ili 4 horizontalne ili 2 vertikalne i 2 horizontalne (na 3 načina)
n=5: ili 5 vertikalnih ili 2 horizontalne i 3 vertikalnih (4 načina) ili 4 horizontalne i jedna vertikalna (3 načina)

N	Br mogucnosti
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8

Sada je moguće da uočimo Fibonačijev niz. Još nam samo formalan dokaz fali:
Treba da izračunamo broj mogućnosti od zavisnosti od n za $(n > 2)$ $a_n = ?$
Imamo dva slučaja:
1. slučaj
Prvu domino pločicu stavimo u levom kraju u vertikalnom položaju, ostane prazna tablica dimenzije $2 \times n - 1$. Nju možemo poklopiti na a_{n-1} načina

2. slučaj
Prvu domino pločicu stavimo u levom kraju u horizontalnom položaju, iznad/ispod nje moramo još jednu horizontalnu, ostane prazna tablica dimenzije $2 \times n - 2$. Nju možemo poklopiti na a_{n-2} načina.
Dobijamo:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{5}$$

A ovo je definicija Fibonačijevog niza i njegov opšti oblik smo već izveli.