Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Nejednakosti i procene

Tamara Despotović
Anamarija Barabaš
Nevena Zdravić
Milena Zastavniković
Nikolina Drašković

Profesor:
dr **Nebojša Ikodinović**

Uvod

Važno je napomenuti različitost pojmova "nejednakost" i "nejednačina". Naime, prvi od njih označava npr. izraz oblika $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$. Za takav izraz možemo reći da je tačan ako je on tačan kada zamenimo bilo koje brojeve u izrazu umesto a и b . Dakle, mi za neke nejednakosti zapravo, dajemo sud, da li su tačne , netačne, ili, nijedno od ta dva. Npr. nejednakost $a^2 + b^2 \geq 3ab$ je tačna za $a = 1$, $b = 4$, dok je za $a = 1$, $b = 1$ netačna. Shodno tome, mi nejednakosti dokazujemo, tj. određenim logičkim postupcima verifikujemo njihovu tačnost u određenom , unapred zadatom skupu.

1 Nejednakosti između brojnih sredina

Definicija 1.1 *Neka je $a = (a1, ..., an)$ data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je* <u>*Harmonijska sredina*</u> *$H_n(a)$ brojeva $a1, a2..., an$ definisana izrazom:*

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}};$$

njihova <u>*Geometrijska sredina*</u> *$G_n(a)$ je definisana sa:*

$$G_n(a) = (a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}};$$

njihova <u>*Aritmetička sredina*</u> *$A_n(a)$ je definisana sa:*

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

i njihova <u>*Kvadratna sredina*</u> *$K_n(a)$ je definisana sa:*

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

.

Teorema 1.1 (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je $A_n(a) \geq G_n(a)$ s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = ... = a_n$.*

Teorema 1.2 (Nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je $G_n(a) \geq H_n(a)$, s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = ... = a_n$.*

Teorema 1.3 (Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je $K_n(a) \geq A_n(a)$, s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = ... = a_n$.*

Teoreme 1.1, 1.2 i 1.3 konačno daju da je:

$$\mathbf{H_n}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{G_n}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{A_n}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{K_n}(\mathbf{a}).$$

Teorema 1.4 *Ako je $a = (a_1, ..., a_n)$ proizvoljna n-torka pozitivnih brojeva, tada je:*

$$\min\{a_1, a_2, ..., a_n\} \leq H_n(a)$$

.

Dokaz. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq a_n.$$

Tada je $\min\{a_1, a_2, ..., a_n\} = a_1$. Na osnovu nejednakosti od malopre tj. $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq a_n$ je: $\frac{a_1}{a_2} \leq 1, \frac{a_1}{a_3} \leq 1, ..., \frac{a_1}{a_n} \leq 1$, tako da je $\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + ... + \frac{a_1}{a_n} \leq 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n$, odakle sledi

$$a_1\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \leq n \Longrightarrow a_1 \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = H_n(a)$$

čime je dokaz završen. Δ

Teorema 1.5 *Ako je $a = (a_1, ..., a_n)$ proizvoljna n-torka pozitivnih brojeva, tada je*

$$K_n(a) \leq \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Dakle, konačno imamo da važi

$$\min\{a_1, ..., a_n\} \leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a) \leq \max\{a_1, ..., a_n\}.$$

1.1 Primena nejednakosti između brojnih sredina

Bernulijeva nejednakost[1]

$$(1 + \alpha)n \geq 1 + n\alpha, \alpha \geq 1, n \in N.$$

Rešenje: Kako je $1+\alpha \geq 0$, to je $1+n\alpha \geq 0$. Koristeći 1.1 (A-G) nejednakost imamo:

$$((1 + n\alpha)\underbrace{1 \ldots 1}_{n-1})^{\frac{1}{n}} \overset{(G-A)}{\leq} \frac{1 + n\alpha + 1 + .. + 1}{n} = 1 + \alpha, n > 1$$

Dakle,

$$1 + n\alpha \leq (1 + \alpha)^n. \quad \Delta$$

[1] J. Bernoulli (1654-1705), švajcarski matematičar

Zadatak 1. Dokazati da za svaka tri prirodna broja a, b, c važi nejednakost:

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} b^{\frac{a}{a+b+c}} c^{\frac{a}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Rešenje: Iz 1.2 (G-H)nejednakosti imamo da je:

$$G(\underbrace{a,\ldots,a}_{a},\underbrace{b,\ldots,b}_{b},\underbrace{c,\ldots,c}_{c}) \geq H(\underbrace{a,\ldots,a}_{a},\underbrace{b,\ldots,b}_{b},\underbrace{c,\ldots,c}_{c})$$

odnosno,

$$\sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c} \leq \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a}}_{a}+\underbrace{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}}_{b}+\underbrace{\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{c}}_{c}} = \frac{a+b+c}{3}. \quad \Delta$$

Zadatak 2. Dokazati da za sve pozitivne, realne brojeve a, b, c važi nejednakost:

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Rešenje: Na osnovu 1.3 (A-K) nejednakosti je:

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}} \overset{(K-A)}{\geq} \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Longrightarrow a^4+b^4+c^4 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}. \quad (1)$$

'

Zbog iste (A-K) nejednakosti imamo da je:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \overset{(K-A)}{\geq} \frac{a+b+c}{3} \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \geq \frac{(a+b+c)^4}{9}. \quad (2)$$

Sada, iz (1) i (2) imamo da je

$$a^4+b^4+c^4 \geq \frac{(a+b+c)^4}{27} \quad (3)$$

Prema 1.1 (G-A) nejednakosti je

$$\sqrt[3]{abc} \overset{(G-A)}{\leq} \frac{a+b+c}{3} \Longrightarrow (a+b+c)^3 \geq 27abc$$

Množenjem poslednje nejednakosti sa $a+b+c>0$ dobija se:

$$(a+b+c)^4 \geq 27abc(a+b+c),$$

što zajedno sa (3) daje:

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c). \quad \Delta$$

2 Nestandardne nejednakosti

Neklasični primeri nejednakosti su izrazi koji ne potpadaju u definiciju nejednakosti koju smo naveli, ali su ipak nejednakosti, s obzirom da se dokazuju. U ovom širem smislu, nejednakost je i $2 < 3$, i to tačna, dok je izraz $2 > 3$ nejednakost koja nije tačna. Za rešavanje ovih zadataka potrebno nam je i poznavanje osobina celih brojeva.

Zadatak 1. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Rešenje: Ključna stvar u ovom zadatku jeste očigledna nejednakost

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

. Za $n = 1, 2, 3, \ldots$ dobijamo da je:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \ldots, \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

Neka je $A = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100}$. Zbog prethodnih nejednakosti, važiće

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{100}{101}$$

i

$$A > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{98}{99}.$$

Vidimo da u obe nejednakosti desne strane podsećaju na $\frac{1}{A}$. Množenjem sa A dobijamo:

$$\frac{1}{200} < A^2 < \frac{1}{101}$$

Kako bismo korenovali, bilo bi zgodno da imamo kvadrate prirodnih brojeva, pa ćemo malo popraviti poslednju nejednakost:

$$\frac{1}{225} < \frac{1}{200} < A^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

odakle sledi

$$\frac{1}{15} < A < \frac{1}{10}$$

Zadatak 2. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$$

Rešenje: Nejednakost sa leve strane je odčigledna. Naime, vidimo da važi:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n} \\
&> \frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\ldots+\frac{1}{n+n} \\
&= \frac{n}{2n}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Desnu nejednakost ćemo dokazati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} &= \frac{1}{2}[(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n})+(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1})+\ldots+(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n})] \\
&= \frac{1}{2}(\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}) \\
&< \frac{1}{2}(\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\ldots+\frac{3n}{2n^2})=\frac{3}{4}+\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Oduzimajući $\frac{1}{n}$ sa leve i desne strane poslednje nejednakosti, dobijamo i dokazujemo traženu nejednakost.

3 Geometrijske nejednakosti

Široku klasu nejednakosti koje se sreću u primenama čine geometrijske nejednakosti. Pod geometrijskom nejednakošću se najčešće podrazumeva ona nejednakost koja važi za elemente trougla ili neke druge geometrijske figure (četvrougla, kupe, valjka, lopte, itd.)

3.1 Nejednakosti za elemente trougla

Zadatak 1. Dokazati da važi sledeca nejednakost:

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq 2\sqrt{3}rR$$

Rešenje: Polazimo od (A-K) nejednakosti za stranice datog trougla

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \overset{(K-A)}{\geq} \frac{a+b+c}{3}$$

Uzevši u obzir formulu za poluobim trougla $s = \frac{a+b+c}{3}$,i ako pomnozimo prethodnu nejednakost sa $\sqrt{3}$ dobijamo sledece:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2\sqrt{3}s}{3},$$

odakle je

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2s} \quad \Longrightarrow \quad \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2s}abc$$

Znajući da je : $P = rs = \frac{abc}{4R}$ tj. $abc = 4RP = 4Rrs$, gde je P površina trougla ,iz prethodne nejednakosti sledi:

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2s}4Rrs = 2\sqrt{3}rR. \qquad \Delta$$

Zadatak 2. Dokazati da za uglove trougla važe sledeća nejednakost:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Rešenje: Kako je

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} = \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4ac}}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4ab}}$$

dobija se

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(a+c-b)^2}{64a^2b^2c^2}}$$

Kako su, $a+b-c$, $b+c-a$ i $a+c-b$ pozitivni brojevi (iz **Nejednakosti trougla**: *Zbir bilo koje dve stranice trougla, veci je od trece stranice*), dobijamo:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}{8abc} \tag{4}$$

Ako su a,,b,c stranice trougla, tada je:

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2} \le \sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{b^2-(c-a)^2} \le b, \quad \sqrt{c^2-(a-b)^2} \le c \qquad tj.$$

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)} \le a, \quad \sqrt{(b+c-a)(b-c-a)} \le b, \quad \sqrt{(c+a-b)(c-a+b)} \le c$$

Množenjem prethodnih nejednakosti , imamo da je:

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(a+c-b)^2} \le abc$$

, odnosno

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \le abc \tag{5}$$

Sada iz (4) i (5) $\Longrightarrow \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$. $\quad\Delta$

3.2 Stereometrijske nejednakosti

Zadatak 1. Ako su a, b, c ivice, P površina, a V zapremina pravouglog paralelopipeda, onda važe nejednakosti:

$$216V^2 \le P^3 \qquad , \qquad P \le \frac{2}{3}(a+b+c)^2$$

Rešenje: Podsetimo se da je površina pravouglog parelelopipieda

$$P = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + bc + ca),$$

a zapremina

$$V = BH = abc,$$

gde su B=baza,M-omotač, H-visina pravouglog paralelopipeda.
Na osnovu *Aritmetičke* i *Geometrijske* sredine i nejednakosti među njima, za brojeve ab, bc i ca, imamo:

$$\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca} \le \frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Prethodni izraz, podignemo na treći stepen, a zatim pomnožimo sa 27 i dobijamo izraz oblika:

$$27(a^2b^2c^2) \leq (ab+bc+ca)^3, \tag{6}$$

odakle i sledi prva nejednakost, jer je $V = abc$, pa je

$$216V^2 = 216(a^2b^2c^2) = 27 \cdot 8(a^2b^2c^2) \overset{(6)}{\leq} 8(ab+bc+ca)^3 = P^3$$

$$\Longrightarrow 216V^2 \leq P^3$$

Što se tiče druge nejednakosti, kako je zbog (A-K) nejednakosti ispunjeno $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}$ tj. kad kvadriramo izraz,

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}, \tag{7}$$

iz $P = 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \overset{(7)}{\leq} (a+b+c)^2 - \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c)^2 \Longrightarrow P \leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2 \quad \Delta$

Zadatak 2. Ako su r, h, V,M redom poluprečnik osnove pravog kružnog valjka, njegova visina, zapremina i površina omotača, onda važe nejednakosti:

$$M \leq \frac{\pi}{2}(r+h)^2, \qquad 54\pi V^2 \leq P^3$$

Rešenje:

Kako je omotac valjka, $M = 2r\pi h$, prva nejednakost sledi iz (G-A) nejednakosti za brojeve r i h, tj.

$$\frac{r+h}{2} \geq \sqrt{rh} = (\frac{M}{2\pi})^{\frac{1}{2}}$$

Druga nejednakost: Kako je $P = 2\pi(r^2+rh), i \quad V = r^2\pi h$, imamo

$$P = 2\pi(r^2 + \frac{V}{\pi r}) = 2\pi(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r}). \tag{8}$$

Koristeći (G-A) nejednakost dobijamo:

$$r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} \geq 3\sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{V}{2\pi r} \cdot \frac{V}{2\pi r}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4(\pi)^2}}$$

Odnosno, prema (8) je

$$\frac{P^3}{(8\pi)^3} = (r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r})^3 = 27\frac{V^2}{4(\pi)^2}$$

odakle sledi i treća nejednakost. Δ

4 Košijeva nejednakost i primena

Polazeći od nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine može se pokazati Košijeva nejednakost koja je dobro poznata i igra važnu ulogu u teoriji nejednakosti.

Teorema 4.1 (Košijeva nejednakost[2]) *Ako su date dve n-torke realnih brojeva $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, tada važi*

$$(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2) \tag{9}$$

s jednakošću ako i samo ako je $|\frac{a_1}{b_1}| = |\frac{a_2}{b_2}| = \ldots = |\frac{a_n}{b_n}|$.

Dokaz: Označimo sa

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad A_k = \frac{a_k}{\sqrt{A}}, \quad B_k = \frac{b_k}{\sqrt{B}}.$$

Dokažimo najpre da je

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} B_k^2 = 1$$

Zaista,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{A} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \frac{A}{A} = 1$$

Analogno se dokazuje i druga jednakost. Kako prema $\mathbf{G_n(a)} \leq \mathbf{K_n(a)}$ važi

$$|A_k B_k| \leq \frac{A_k^2}{2} + \frac{B_k^2}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Sumiranjem tih nejednakosti, dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k B_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} B_k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k B_k| = \frac{1}{\sqrt{AB}} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$$

i zaključujemo da je

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sqrt{AB}$$

odnosno

$$(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2 \leq AB(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)$$

Zadatak 1. Dokazati da za svako $x, y, z > 0$ važi nejednakost

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \geq 9$$

Rešenje: Stavljajući u Košijevu nejednakost da je $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $a_3 = \sqrt{z}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}$ i $b_3 = \frac{1}{\sqrt{z}}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) &= ((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2)((\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2+(\frac{1}{\sqrt{z}})^2) \\ &\geq (\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\frac{1}{z})^2 = 9\end{aligned}$$

Zadatak 2. Neka je $a+b+c=1$. Dokazati da je $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Rešenje: Iz Košijeve nejednakosti imamo da je

$$1^2 = (a+b+c)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(1+1+1)$$

tj. $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$, što je i trebalo da dokažemo.

Literatura

[1] Engel A. *Problem-solving strategies* Institut für Didaktik der Mathematik
Johann Wolfgang Goethe–Universität Frankfurt am Main Senckenberganlage 9–11 60054 Frankfurt am Main 11 Germany