NEJEDNAČINE

Autori:

Miloš Šuković

Nenad Vasić

Aleksandra Branković

Tina Mastilović

Aleksandar Ivanišević

Zadatak 1 *Rešiti nejednačinu:* $2x + a > ax - 3$ *u zavisnosti od parametra* a.

REŠENJE.

$$2x + a > ax - 3$$

$$2x - ax > -3 - a$$

$$x(2 - a) > -3 - a$$

Ono što sada želimo je da podelimo obe strane sa $(2-a)$, ali moramo da pazimo šta će se desiti sa znakom nejednakosti pri tom deljenju, u zavisnosti od znaka izraza $(2 - a)$.

Prvi slučaj, $2 - a > 0$, tj. $a < 2$. Tada nejednakost važi za $x > \frac{-3-a}{2-a}$.

Drugi slučaj, $2 - a < 0$, tj, $a > 2$. Tada nejednakost važi za $x < \frac{-3-a}{2-a}$.

Treći slučaj, $a = 2$. Tada poslednja nejednakost postaje $0 > -3 - 2$, tj. $0 > -5$, što je uvek tačno, pa u ovom slučaju nejednakost važi za svako $x \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Zadatak 2 *U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu*

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-7} \le 1$$

Rešenje. Naizgled veoma lak zadatak, na kome učenici često pogreše, tako što pomnože obe strane imeniocem razlomka. To ne smemo uraditi bez detaljne analize znaka funkcije koja se nalazi u imeniocu, pa zato dodajemo -1 levoj i desnoj strani nejednakosti, i dobijamo

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-7} - 1 \le 0$$

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-7} - \frac{x^2-6x-7}{x^2-6x-7} \le 0$$

$$\frac{10x+10}{x^2-6x-7} \le 0$$

odnosno:

$$\frac{x+1}{(x+1)(x-7)} \le 0$$

Za $x = -1$, data nejednačina nije definisana, dok za $x \neq -1$, nejednačina je ekvivalentna nejednačini $\frac{1}{x-7} \le 0$, čiji je skup rešenja $(-\infty, 7)$. Prema tome, nejednačina je tačna za

$$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 7).$$

■

Zadatak 3 *Odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ važi sledeća nejednakost:*

$$\sqrt{x+2} > 4 - x$$

Rešenje. Proverimo prvo za koje $x \in \mathbb{R}$ je ova nejednačina definisana:

$$x + 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2$$

Prvi slučaj: Desna strana nejednakosti je manja od nule, tj. $4 - x < 0$. Tada $x \in (4, +\infty)$. Tada je leva strana nejednakosti veća ili jednaka nuli, dok je desna strana manja od nule, pa nam za svako x iz intervala $(4, +\infty)$ važi nejednakost.

Drugi slučaj: $4 - x \geq 0$, tj $x \in [-2, 4]$. Sada su obe strane nejednakosti pozitivne, pa možemo da kvadriramo.

$$x + 2 > (4 - x)^2$$

$$x + 2 > 16 - 8x + x^2$$

$$x^2 - 9x + 14 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$$

Kako je funkcija konveksna, biće $x^2 - 9x + 14 < 0$ za $x \in (2, 7) \cap [-2, 4] = (2, 4]$.

Konačno: Uniranjem rešenja iz dva slučaja, dobijamo da početna nejednakost važi za

$$x \in (4, +\infty) \cup (2, 4] = (2, +\infty).$$

■

Zadatak 4 *Odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ važi sledeća nejednakost:*

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$$

Rešenje. Proverimo prvo za koje $x \in \mathbb{R}$ je ova nejednačina definisana:

$$x^2+1>0 \quad \wedge \quad 2x-5>0$$

Ovi uslovi su ispunjeni za $x > \frac{5}{2}$.

Kako je funkcija $\log_{\frac{1}{2}} x$ strogo opadajuća, to je početna nejednakost ekvivalentna nejednakosti:

$$x^2+1 > 2x-5$$

$$x^2-2x+1 > -5$$

$$(x-1)^2 > -5$$

Poslednja nejednakost važi za svaki realan broj x, pa je konačno rešenje:

$$x > \frac{5}{2}.$$

■

Zadatak 5 *Odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ važi sledeća nejednakost:*

$$\sqrt{\log_{10} x} \geq \log_{10} \sqrt{x}$$

Rešenje. Proverimo prvo za koje $x \in \mathbb{R}$ je ova nejednačina definisana:

$$\log_{10} x \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x} > 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

Iz ova četiri uslova, kao presek skupova, zaključujemo da ima smisla posmatrati ovu nejednačinu samo za $x \in [1, +\infty)$. Tada, kako je $\log_{10} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_{10} x$, važi:

$$\sqrt{\log_{10} x} \geq \frac{1}{2} \log_{10} x$$

Smenom $\xi = \log_{10} x$, uz primedbu da je $\xi \geq 0$, jer je $x \geq 1$, dobijamo:

$$\sqrt{\xi} \geq \frac{1}{2}\xi$$

Kako su obe strane nejednakosti veće od nule, možemo ih kvadrirati.

$$\xi \geq \frac{1}{4}\xi^2$$

$$-\frac{1}{4}\xi^2 + \xi \geq 0$$

$$\xi(1 - \frac{1}{4}\xi) \geq 0$$

Kako su nule funkcije sa leve strane nejednakosti $\xi_1 = 0$ i $\xi_2 = 4$, a uz to je funkcija i konkavna, sledi da će poslednja nejednakost važiti za $\xi \in [0, 4]$, tj:

$$\begin{array}{rcll} 0 \leq & \xi & \leq 4, & \xi = \log_{10} x \\ 0 \leq & \log_{10} x & \leq 4, & /10^{()} \\ 10^0 \leq & 10^{\log_{10} x} & \leq 10^4, & \textit{jer je osnova stepenovanja(10) veća od 1} \\ 1 \leq & x & \leq 10^4 & \end{array}$$

Pa je x koje zadovoljava početnu nejednakost iz inervala $[1, 10^4]$. ∎

Zadatak 6 *Odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ važi sledeća nejednakost:*

$$\sqrt{\frac{7x-1}{x}} > \frac{x-1}{x} \tag{1}$$

Rešenje. Proverimo prvo za koje $x \in \mathbb{R}$ je ova nejednačina definisana:

$$\frac{7x-1}{x} \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

Oba ova uslova su zadovoljena ako je $x \in (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{7}, +\infty)$.

Prvi slučaj: $\frac{x-1}{x} < 0$, tj. $x \in (0, 1)$. U preseku sa početnim uslovima dobijamo $x \in [\frac{1}{7}, 1)$. Tada je leva strana nejednakosti (1) veća ili jednaka nuli, dok je desna strana manja od nule, pa nam za svako x iz intervala $[\frac{1}{7}, 1)$ važi nejednakost.

Drugi slučaj: $\frac{x-1}{x} \geq 0$, tj $x \notin (0, 1)$. U preseku sa početnim uslovima skup se ne menja, pa ostaje da ispitamo nejednakost za $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. Sada su obe strane nejednakosti (1) pozitivne, pa možemo da kvadriramo.

$$\frac{7x-1}{x} > \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$\frac{(7x-1)x}{x^2} - \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$$

$$\frac{7x^2 - x - x^2 + 2x - 1}{x^2} > 0$$

$$\frac{6x^2 + x - 1}{x^2} > 0$$

Kako je $x^2 > 0$ na skupu koji pokriva drugi slučaj, ispitujemo kada je $6x^2 + x - 1 > 0$. Rešenja kvadratne jednačine $6x^2 + x - 1 = 0$ su

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{3} \end{cases}$$

Kako je funkcija konveksna, zaključujemo nejednakost $\frac{6x^2+x-1}{x^2} > 0$ važi za $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$, što u preseku sa skupom koji posmatramo daje $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [1, +\infty)$.

Konačno: Uniranjem rešenja iz dva slučaja, dobijamo da nejednakost (1) važi za

$$x \in [-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{7}, +\infty).$$

■

Zadatak 7 *Odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ važi nejednakost*

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$$

Rešenje.

$$2^{x+2}(1 - 2^1 - 2^2) > 5^{x+2}\Big(\frac{1}{5} - 1\Big)$$

$$-5 \cdot 2^{x+2} > -\frac{4}{5} \cdot 5^{x+2}$$

$$-5 \cdot \frac{2^{x+2}}{5^{x+2}} > -\frac{4}{5}$$

Množeći obe strane nejednakosti sa $-\frac{1}{5}$ dobijamo:

$$\Big(\frac{2}{5}\Big)^{x+2} < \frac{4}{25}$$

$$\Big(\frac{2}{5}\Big)^{x+2} < \Big(\frac{2}{5}\Big)^{2}$$

Što je, zbog činjenice da je osnova manja od jedan, ekvivalentno nejednakosti

$$x + 2 > 2,$$

tj.

$$x > 0$$

■

Zadatak 8 *Odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ važi nejednakost*

$$\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \leq 3$$

Rešenje.

$$\begin{array}{rcll}
-3 \leq & 2^{4x^2-1} - 5 & \leq 3, & / + 5 \\
2 \leq & 2^{4x^2-1} & \leq 8 & \\
2^1 \leq & 2^{4x^2-1} & \leq 2^3 & \\
1 \leq & 4x^2 - 1 & \leq 3, & \textit{jer je osnova stepenovanja(2) veća od 1} \\
2 \leq & 4x^2 - 1 & \leq 4 & / \cdot \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2} \leq & x^2 & \leq 1 &
\end{array}$$

Iz $\frac{1}{2} \leq x^2$ zaključujemo $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, dok iz $x^2 \leq 1$ zaključujemo $x \in [-1, 1]$, što nam zajedno daje da je početna nejednakost tačna za

$$x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

■

Zadatak 9 *Odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ važe sledeće nejednakosti:*

a) $2\sin x - \sqrt{3} > 0$

b) $2\cos x + 1 < 0$

Rešenje. Posmatraćemo nejednakosti na intervalu $(0, 2\pi)$, a kako su $\sin x$ i $\cos x$ $2\pi-$periodične, lako ćemo rešenje proširiti na ceo skup realnih brojeva.

a)

$$\begin{aligned} 2\sin x - \sqrt{3} &> 0 \\ 2\sin x &> \sqrt{3} \\ \sin x &> \tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Kako je $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ za $x = \frac{\pi}{3}$ i $x = \frac{2\pi}{3}$, a uz to funkcija $\sin x$ raste od $\frac{\pi}{3}$ do $\frac{\pi}{2}$, pa onda opada do $\frac{2\pi}{3}$, jasno je da nejednakost važi za $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, dok je van tog intervala funkcija $\sin x$ ili negativna, ili manja od $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Prosirenjem tog rešenja na ceo skup realnih brojeva, dobijamo da nejednakost važi za

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b)

$$\begin{aligned} 2\cos x + 1 &< 0 \\ 2\cos x &< -1 \\ \cos x &< -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Kako je $\cos x = -\frac{1}{2}$ za $x = \frac{5\pi}{6}$ i $x = \frac{7\pi}{6}$, a izmedju te dve vrednosti je funkcija opadajuća pa rastuća, to sledi da će nejednakost važiti za $x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$, što nam uz proširenje na ceo skup realnih brojeva daje da nejednakost važi za:

$$x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

■

Zadatak 10 *Odrediti za koje $x \in [0, 2\pi)$ je sledeća nejednakost tačna:*

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\sin x}$$

Rešenje. Prvo, primetimo da ova nejednakost ima smisla samo kada su:

$$\sin x \neq 0 \qquad \wedge \qquad \cos x \neq 0,$$

a to je ispunjeno kada $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
Posmatraćemo dva slučaja, $\sin x > 0$ i $\sin x < 0$, tj $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ i $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Prvi slučaj: Kako je $sinx > 0$, pri množenju obe strane sa $sinx$, znak nejednakosti ostaje isti:

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\sin x}$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} < 1$$
$$\operatorname{tg} x < 1$$

Kako je $\operatorname{tg} x = 1$, na intervalu koji razmatramo samo za $x = \frac{\pi}{4}$, zaključujemo da će u prvom slučaju nejednakost važiti za $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ (jer je $\operatorname{tg} x$ rastuća funkcija), kao i na $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, jer je $\operatorname{tg} x$ negativna na $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Drugi slučaj: Kako je $sinx < 0$, pri množenju obe strane sa $sinx$, znak nejednakosti se menja:

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\sin x}$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} > 1$$
$$\operatorname{tg} x > 1$$

Opet slično razmišljamo, jednakost postižemo u tački $x = \frac{5\pi}{4}$, a kako poznajemo znak i monotonost funkcije $\operatorname{tg} x$, zaključujemo da će nejednakost važiti za $x \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Konačno, objedinjavanjem dva slučaja dobijamo da je početna nejednakost tačna za

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

■