Matematički fakultet, Beograd

IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE RAVNI

Profesor:

Nebojša Ikodinović

Studenti:

Jovana Protić 162/2012

Svetlana Ziriković 43/2012

Tijana Molerović 217/2012

Milica Drobnjak 118/2012

Jelena Stanojević 144/2012

Marijana Milenković 74/2012

Decembar, 2015.

1. Opisati tipove izometrijskih transformacija.

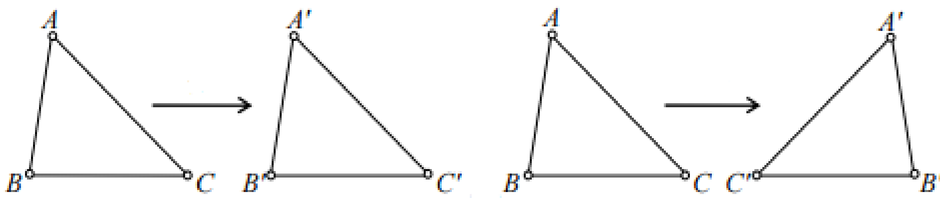
╔

○ <u>Definicija: Izometrija je preslikavanje koje čuva rastojanje između tačaka.</u>

● <u>Definicija:</u> Preslikavanje $\beth$: $E^n \to E^n$, n={1, 2, 3}, koje je bijekcija i koje svake dve tačke A i B prostora E^n preslikava u tačke A’ i B’ takve da je (A, B) ≅ (A’, B’) naziva se ***izometrijska transformacija***. ╝

Sada možemo uvesti još jednu definiciju koja nam pomaže u rešavanju zadatka.

● <u>Definicija</u>*:* Izometrijska transformacija $\beth$: $E^2 \to E^2$ je ***direktna*** ako čuva orijentaciju ravni E^2 tj. svaki trougao te ravni preslikava u trougao iste orijentacije. Izometrijska transformacija $\beth$: $E^2 \to E^2$ je ***indirektna*** ako svaki trougao te ravni preslikava u troguao suprotne orijentacije.



Može se dokazati da je za neku izometriju dovoljno da jedan trougao preslikava u trougao iste, odnosno suprotne orijentacije da bi ona bila direktna ili indirektna. Dakle, svaka izometrija je ili direktna ili indirektna!
Dalje, proizvod dve direktne izometrije je takođe direktna izometrija, dok proizvod jedne indirektne i jedne direktne izometrije daje indirektnu izometriju. Kako u ravni imamo samo dve moguće orijentacije, proizvod dve indirektne će dati direktnu izometriju.

╔

○ *Fiksna tačka* funkcije je tačka koju funkcija preslikava u samu sebe.

● Definicija: Preslikavanje $\mathcal{E}: E^n \to E^n$ koje svaku tačku A preslikava u samu sebe tj. $(\forall A \in E^n)\ \mathcal{E}(A) = A$ naziva se *koincidencija.*

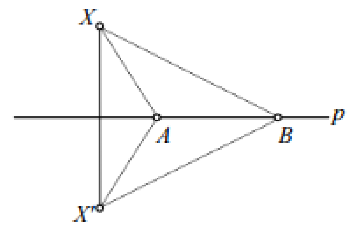
● <u>Definicija:</u> Neka je p prava ravni E^2. Izometrijska transformacija te ravni koja nije koincidencija i za koju je svaka tačka prave p fiksna naziva se ***osna refleksija*** (simetrija) te ravni u oznaci $\mathcal{S}_p$. Prava p naziva se ***osa*** te simetrije.

○ Sve fiksne tačke osne refleksije su na osi te refleksije.

○ Osna refleksija je indirektna izometrija.

╝

2. Ako je $\mathcal{S}_p$ osna refleksija neke ravni i za neku tačku te ravni važi $\mathcal{S}_p$(X)=X’≠X, tada je osa p te refleksije medijatrisa duži XX’. Dokazati.



Neka su A i B proizvoljne tačke ose p. Tada: $\mathcal{S}_p$: A, B, X ↦ A, B, X'. Kako je $\mathcal{S}_p$ izometrija, mora da važi AX≅AX' I BX≅BX' pa tačke A i B pripadaju medijatrisi duži XX'. Kako svaka duž ima jedinstvenu medijatrisu, medijatrisa duži XX' je prava AB tj osa p.

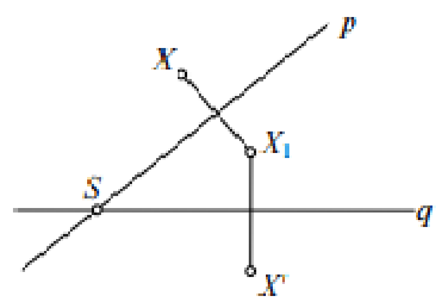
○ Jedine prave koje se osnom refleksijom ravni preslikavaju u sebe su osa te refleksije i sve prave te ravni koje su normalne na osu.

3. Predstaviti izometrije ravni pomoću osnih refleksija.

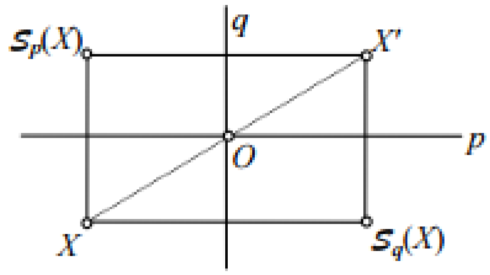
○ <u>Teorema</u>: Svaka izometrija ravni se može predstaviti kao kompozicija najviše 3 osne refleksije.

Direktne izometrije možemo dobiti kao kompoziciju dveju osnih simetrija. Ukoliko se ose poklapaju, ta kompozicija predstavlja koincidenciju. Imamo još dva slučaja, kada se ose seku ili su paralelne.

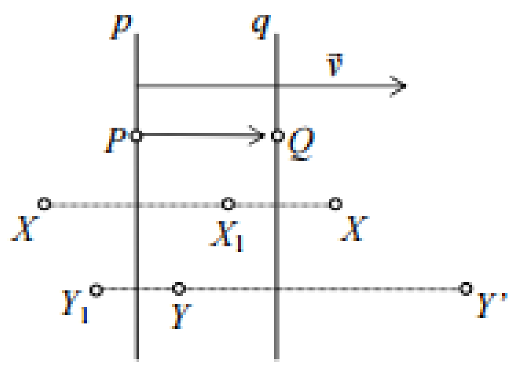
1) ○ Neka su p i q dve prave neke ravni koje se seku u tački S. Uzmemo proizvoljno tačku X na koju delujemo osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ u odnosu na osu p, pri čemu dobijemo tačku X_1. Zatim na tačku X_1 delujemo još jednom osnom refleksijom $\mathcal{S}_q$ u odnosu na pravu q pri čemu dobijemo tačku X'. Kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$naziva se ***centralna rotacija*** ili samo ***rotacija*** te ravni, u oznaci $\mathcal{R}_{S,\omega}$ sa centrom S, za ugao ω. Kako izometrijska transformacija čuva uglove, vidimo da je $\omega = 2 * \angle pSq$.



○ Specijalan slučaj rotacije kada je $\omega = 180°$ naziva se ***centralna simetrija*** sa centrom O, u oznaci $\mathcal{S}_O$. Dakle, $\mathcal{S}_O = \mathcal{R}_{O,180°}$.

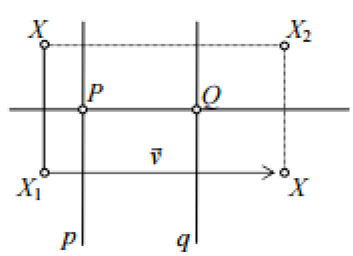


1) Neka su p i q dve paralelne prave neke ravni i P, Q tačke tih pravih redom, takvih da je PQ$\perp$ p. Kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ naziva se ***translacija*** te ravni za vector $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$, u oznaci $\tau_{\vec{v}}$.



Ostalo nam je još da razmotrimo slučaj kompozicije tri osne simetrije.

○ Neka je translacija $\tau_{\vec{v}}$ za vektor $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ i $\mathcal{S}_{PQ}$ osna refleksija sa osom PQ. Kompozicija $\tau_{\vec{v}} \circ \mathcal{S}_{PQ}$ naziva se ***klizajuća refleksija*** ravni u oznaci $\mathcal{G}_{2\overrightarrow{PQ}}$ sa osom PQ i za vektor $2\overrightarrow{PQ}$. Dakle, ako uzmemo proizvoljnu tački X, prvo ćemo je osnom refleksijom $\mathcal{S}_{PQ}$ preslikati u tačku X_1, a zatim translacijom u tačku X.



Klizajuća refleksija je indirektna izometrija ravni kao kompozicija direktne i indirektne izometrije.

4. Dve osne refleksije neke ravni komutiraju ako i samo ako su im ose upravne lil jednake, tj. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow (p \perp q \vee p = q)$. Dokazati.

U dokazu zadatka ćemo koristiti sledeću teoremu.

Teorema: Ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ refleksija , ako je $\mathcal{I}$ proizvoljna izometrija i ako je $\mathcal{I}(\Sigma) = \Pi$, onda je

$$\mathcal{I}\mathcal{S}_\Sigma\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_\Pi.$$

$\Longrightarrow$: Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$

$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p / \circ \mathcal{S}_p$

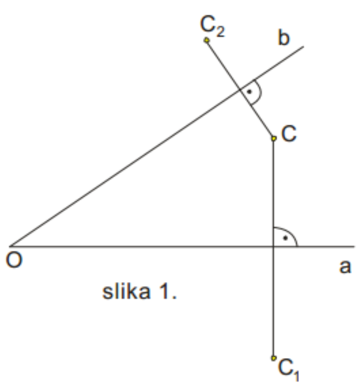
$\Leftrightarrow \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$. Stavljajući da je u prethodnoj teoremi $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ ovo važi

$\overset{T}{\Leftrightarrow} \mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)} = \mathcal{S}_q$ (dve refleksije se poklapaju ako su im ose iste)

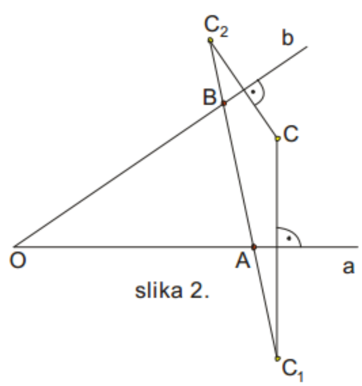
$\Leftrightarrow \mathcal{S}_p(q) = q$, pa su p i q jednake ili međusobno upravne.

$\Longleftarrow$: Ako su ose p i q jednake ili su međusobno upravne, onda je $\mathcal{S}_p(q) = q$, pa je $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$ na osnovu prethodne teoreme. Dakle, tada je $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.

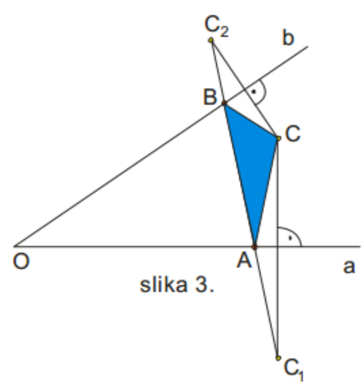
5. Dat je oštar ugao Oab i u njemu tačka C. Konstruisati tačke A i B, A∈ a, B∈ b, tako da obim trougla ABC bude najmanji.



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Najpre konstruišemo tačke C_1 i C_2 koje su simetrične sa tačkom C u odnosu na krak O_a i O_b.(slika 1.)

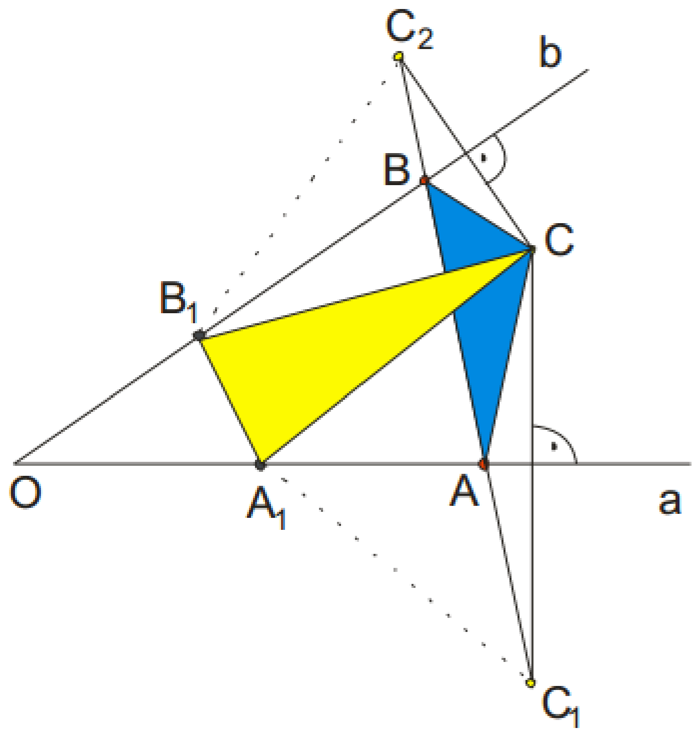
Spojimo duž C_1C_2. Presek ove duži sa kracima O_a i O_b nam daje tačke A i B.(slika2.)

Spojim tačka A, B i C i dobijemo trougao najmanjeg obima. (slika3.)

Njegov obim je O= AB+AC+BC, a kako je AC=AC_1 i BC=BC_2, možemo reći da je obim:

O=AB+AC_1+BC_2, odnosno, obim je duž C_1C_2.

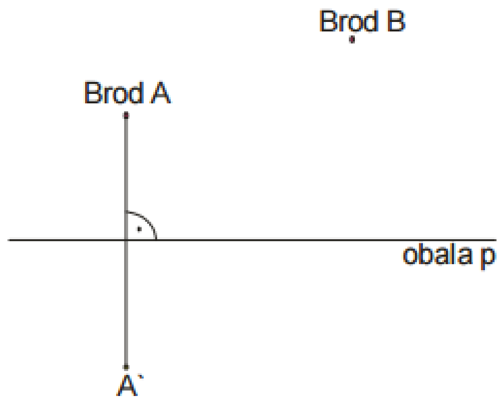
Ako bi uzeli neke druge dve tačke A_1 i B_1, imali bismo:



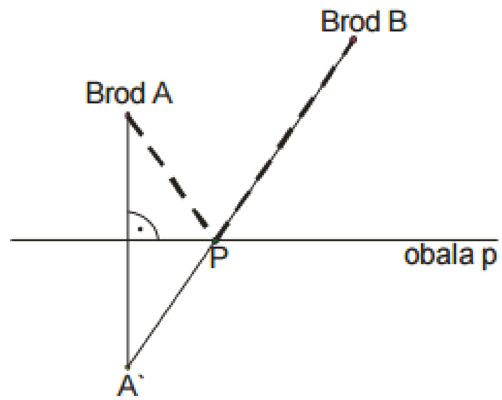
Obim ovog trougla bi bio:O= $A_1B_1 + A_1C + B_1C$ a kako je $A_1C = A_1C_1$ i $B_1C = B_1C_2$ to je obim:O= $A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_2$, sa slike vidimo da je to izlomljena linija koja je duža od C_1C_2.

6. Dva broda, brod A i brod B nalaze se na usidrenom moru, nedaleko od pravolinijske obale p. Sa broda A čamac treba da preveze jednog putnika do obale a zatim da dođe do broda B. Odrediti (konstruisati) najkraći put kojim čamac treba da plovi da bi obavio postavljeni zadatak.

Rešenje:



slika 1.



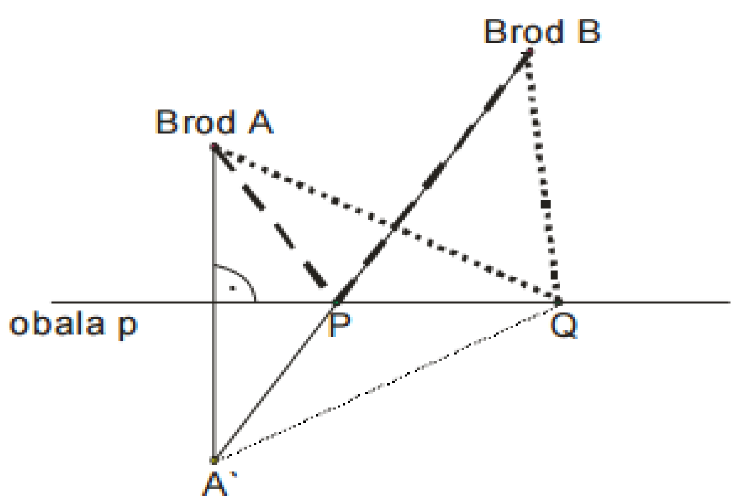
slika 2.

Nađemo tačku A' simetričnu tački A u odnosu na obalu p kao osu simetrije.

Spojimo tačku A' sa tačkom B. U preseku te duži i prave p je tražena tačka P na kojoj treba iskrcati putnika.

Dokaz da je ovo najkraći put je sledeći.

Recimo da se putnik iskrcao na nekom drugom mestu, na primer u taćki Q.



Najkraći put koji smo našli konstrukcijski je AP+PB (AP=A'P), odnosno A'P+PB=A'B .

Putanja AQ+QB (AQ=A'Q), je isto sto i A'Q+QB a to je zbir dve stranice trougla A'QB koji je sigurno veći od dužine stranice A’B. (Iskoristili smo da je zbir dve stranice u trouglu veći od dužine treće stranice!)

ROTACIJA

Kod zadataka sa rotacijom moramo znati sledeće:

*Figuru koju rotiramo

*Gde je centar rotacije

*Ugao rotacije

Što se tiče ugla rotacije moramo paziti da li je negativan ili pozitivan.

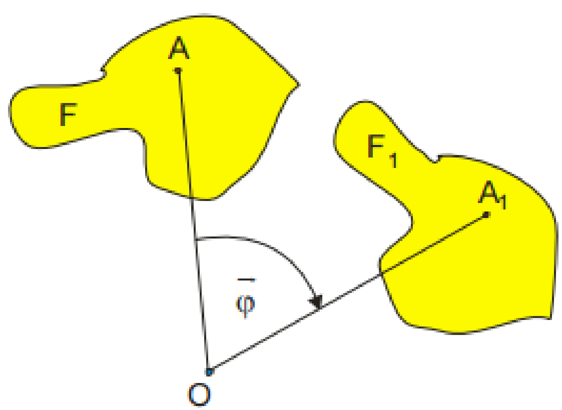
Ako je ugao pozitivan rotaciju vršimo u smeru suprotnom od kazaljke na satu.

Ako je ugao negativan rotaciju vrsimo u smeru kazaljke na satu.

Dakle ovde se radi o uglu koji je se naziva orijentisani ugao, pa je i način obeležavanja malo drugačiji, tj, stavi se znak za vektor : $\vec{\alpha}$ ovo je orijentisani ugao alfa.

Sama rotacije se najčesće obeležava $R_{O,\varphi}$ gde je tačka O centar rotacije a φ taj orijentisani ugao.

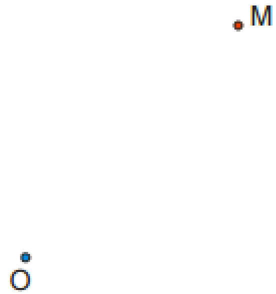
Definicija rotacije kaže:

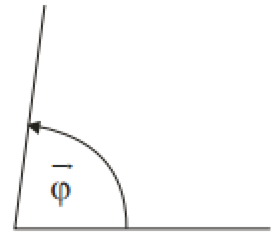


Ako je data ravna figura F, tačka O i orjentisani ugao $\vec{\varphi}$ i ako je figura F' skup svih tačaka u koje se rotacijom $R_{O,\varphi}$ preslikavaju tačke figure F, tada kažemo da se F rotacijom $R_{O,\varphi}$ preslikava na figuru F'.

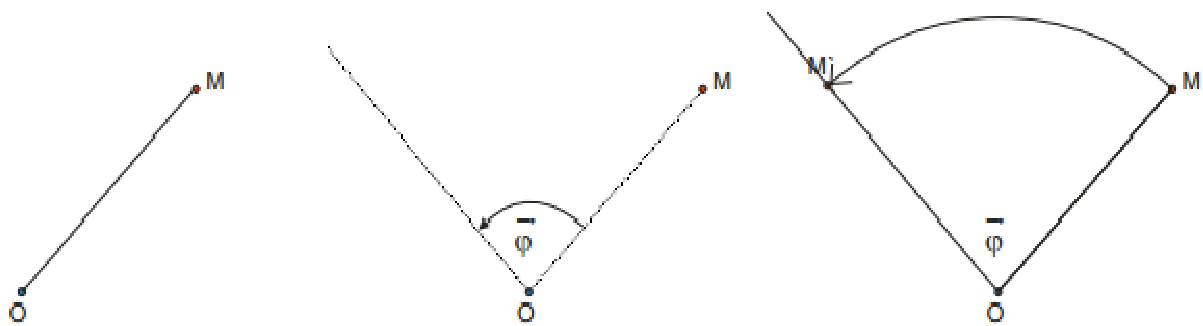
Označavamo sa: $\boldsymbol{R_{O,\varphi}}$**(F)=F'.**

Rotiraćemo tačku M oko tačke O za proizvoljan ugao φ.





Rotaciju vršimo oko tačke O koja je centar rotacije, a idemo u suprotnom smeru kazaljke na satu posto je ugao pozitivan.



slika 1. slika 2. slika 3.

Najpre spojimo centar rotacije O sa tackom M.

Prenesemo ugao φ ali pazimo na smer. OM je jedan krak tog ugla a tacka O je teme.

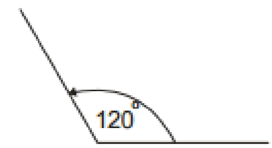
Ubodemo sestar u tačku O, uzmemo rastojanje do M i prenesemo ga lukom do drugog kraka nanetog ugla. Na taj nacin smo dobili tačku M'.

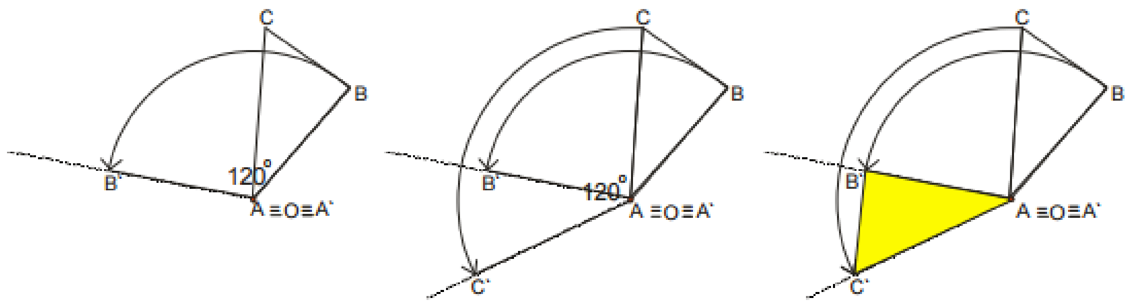
Ovo moramo raditi za svako teme!

7. Dat je trougao ABC i ugao od 120 stepeni. Rotirati dati trougao za dati ugao ako se centar rotacije poklapa sa jednim temenom.

Neka se centar rotacije poklapa sa temenom A.

Za tačke A i B primenimo gore naveden postupak rotacije.

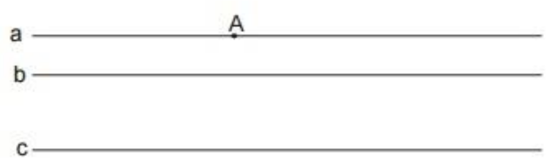




slika 1. slika 2. slika 3.

8. Konstruisati jednakostranični trougao čija tamena pripadaju trima paralelnim pravama.

Nacrtamo tri paralelne prave a, b i c i izaberemo proizvoljnu tačku A na pravoj a.

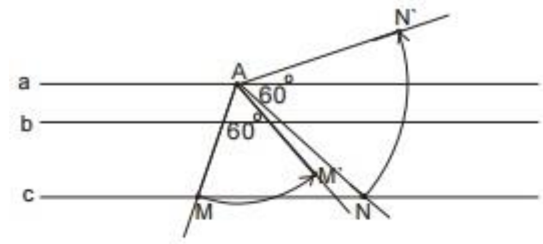


Ideja je da rotiramo pravu c oko tačke A za $60°$. Ta rotirana prava c' će seći pravu b u tački B i dobićemo jednu stranicu trougla.

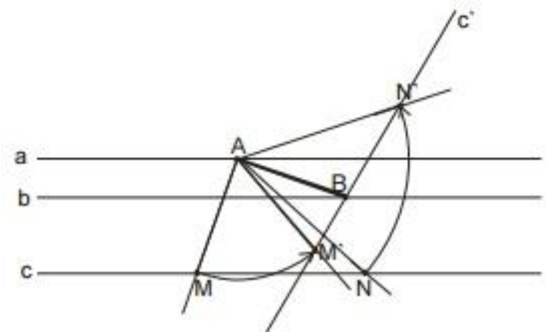
Zašto je ovo rešenje?

Kada rotiramo pravu c oko tačke A za $60°$ mi rotiramo svaku tačku te prave za $60°$. Znamo da rotacija čuva rastojanja, pa svaka ta rotirana tačka ostaje na jednakom rastojanju od A. Kad dobijemo tačku B na preseku prave c' i b, ona je, u stvari, rotirana tačka C sa prave c za $60°$ oko tačke A. Dakle, imamo jednakokraki trougao ABC sa uglom pri vrhu od $60°$, tj. taj trougao je jednakostranični.

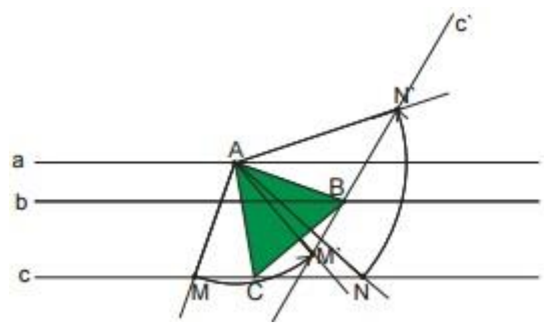
Za rotaciju prave je dovoljno rotirati njenu normalu, ali mi ćemo uzeti dve proizvoljne tačke na pravoj c, recimo M i N, i njih rotirati oko tačke A za $60°$. Tako dobijamo tačke M' i N'.



Spajanjem M' i N' dobijamo pravu c'. Kao što smo već rekli, prava c' seče pravu b u tački B. Tako smo dobili stranicu trougla AB.



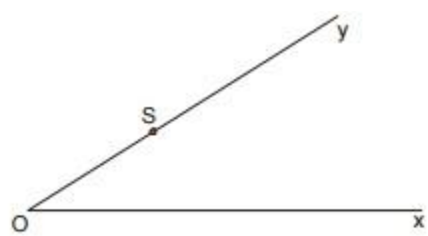
Sada jednostavno uzmemo to rastojanje i presečemo pravu c ili iz A ili iz B. Dobili smo i teme C, odnosno traženi jednakostranični trougao ABC.



9. a) Konstruisati kvadrat $A'B'C'D'$ centralno simetričan datom kvadratu $ABCD$ ako je centar simetrije:

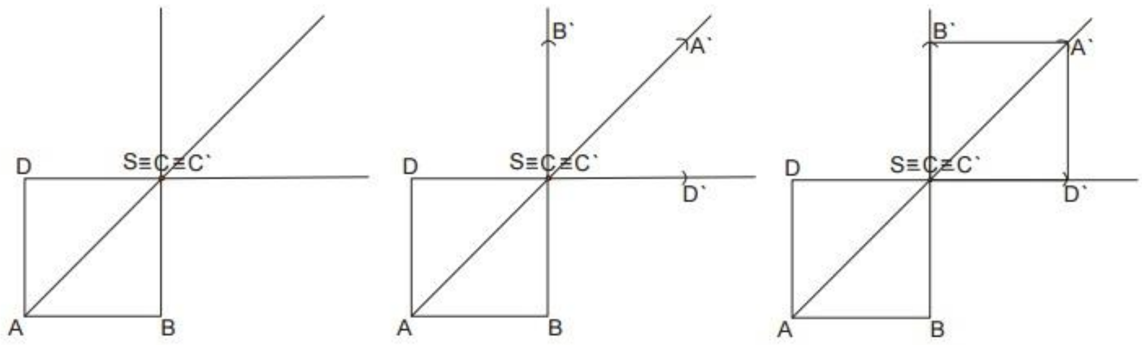
1) teme C;
2) proizvoljna tačka S na stranici BC.

b) Dati ugao $\measuredangle xOy$ preslikati centralnom simetrijom u odnosu na tačku S.

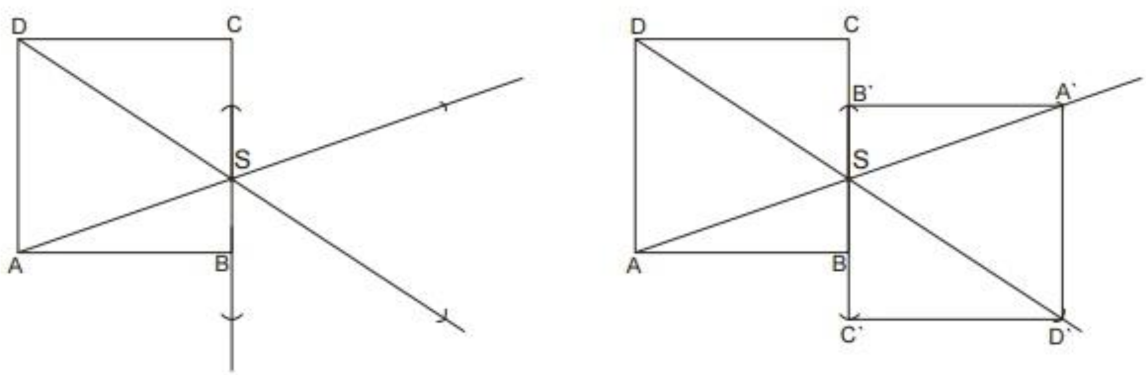


a)

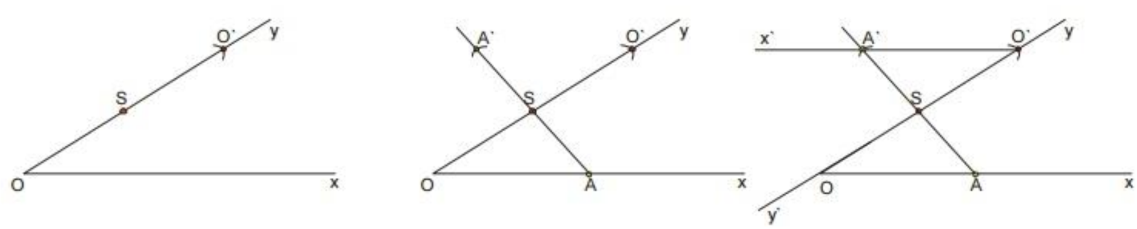
1) Kako je teme C centar simetrije, to je ono istovremeno i svoja slika, tj. $C \equiv C'$. Spojimo teme A sa centrom simetrije C i produžimo na drugu stranu od temena C duž AC. Rastojanje od C do A prenesemo na tu drugu stranu i dobijamo teme A'. Isto uradimo i za preostala dva temena B i D i dobijemo temena B' i D'. Tako smo dobili traženi kvadrat $A'B'C'D'$.



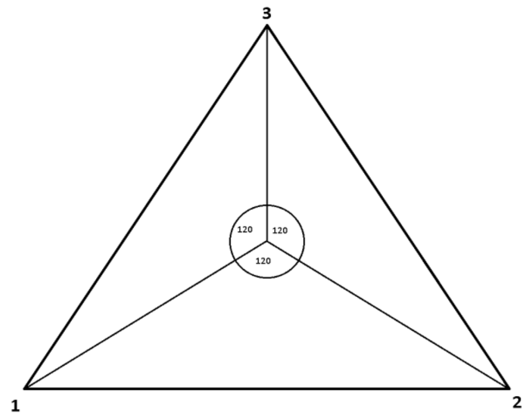
1) Proizvoljno izaberemo tačku S na stranici BC, koja je centar simetrije, i pratimo postupak kao u 1).



b) Najpre, centralnom simetrijom u odnosu na tačku S, preslikamo teme O datog ugla i dobijemo teme O'. Da bismo preslikali krak Ox uzećemo proizvoljnu tačku A na kraku i preslikati je, centralnom simetrijom u odnosu na S, u tačku A'. Spojimo O' i A' i na taj način dobijamo krak $O'x'$.



10. Naći grupu rotacija pravilnog trougla i grupu simetrija.



Označimo sa 1, 2, 3 temena trougla.

Ugao za koji rotiramo trougao je 120°.

Neka je ρ rotacija.

$\varepsilon : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho^2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\rho^3 = \varepsilon$

$\rho^{-1} = \rho^2$

$\circ$ predstavlja kompoziciju.

$\circ$	ε	ρ	ρ^2
ε	ε	ρ	ρ^2
ρ	ρ	ρ^2	ε
ρ^2	ρ^2	ε	ρ

$$\rho \circ \rho : \begin{array}{l} 1 \longmapsto 2 \longmapsto 3 \\ 2 \longmapsto 3 \longmapsto 1 \\ 3 \longmapsto 1 \longmapsto 2 \end{array}$$

1 se sa ρ slika u 2, 2 se sa ρ slika u 3.

2 se sa ρ slika u 3, 3 se sa ρ slika u 1.

3 se sa ρ slika u 1, 1 se sa ρ slika u 2.

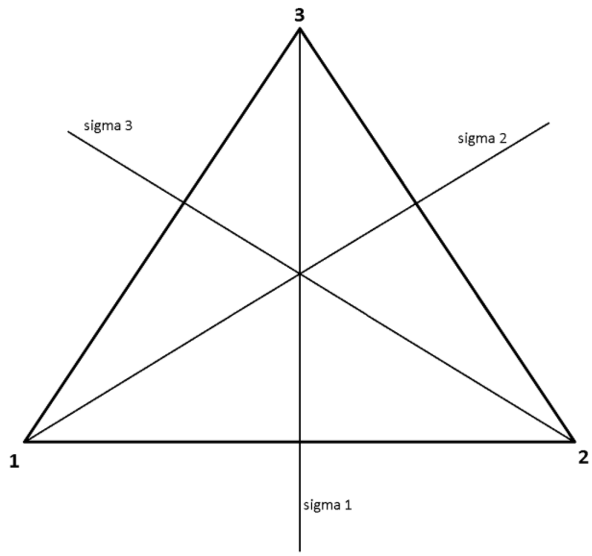
$$\rho^2 \circ \rho : \begin{array}{l} 1 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 3 \longmapsto 2 \\ 3 \longmapsto 1 \longmapsto 3 \end{array}$$

1 se sa ρ slika u 2, 2 se sa ρ^2 slika u 1.

2 se sa ρ slika u 3, 3 se sa ρ^2 slika u 2.

3 se sa ρ slika u 1, 1 se sa ρ^2 slika u 3.

Analogno se dobijaju i ostale kompozicije.



Neka su σ_i , $i = 1, 2, 3$ simetrije.

$\sigma_1 \colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_2 \colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_i^2 = \varepsilon, i = 1, 2, 3$

$\circ$	ε	ρ	ρ^2	σ_1	σ_2	σ_3
ε	ε	ρ	ρ^2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ	ρ	ρ^2	ε	σ_3	σ_1	σ_2
ρ^2	ρ^2	ε	ρ	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	ε	ρ	ρ^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ^2	ε	ρ
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ	ρ^2	ε

$$\rho \circ \sigma_1 \colon \begin{array}{ccc} 1 \longmapsto & 2 \longmapsto & 3 \\ 2 \longmapsto & 1 \longmapsto & 2 \\ 3 \longmapsto & 3 \longmapsto & 1 \end{array}$$

1 se sa σ_1 slika u 2, 2 se sa ρ slika u 3.

2 se sa σ_1 slika u 1, 1 se sa ρ slika u 2.

3 se sa σ_1 slika u 3, 3 se sa ρ slika u 1.

$$\rho \circ \sigma_2 \colon \begin{array}{ccc} 1 \longmapsto & 1 \longmapsto & 2 \\ 2 \longmapsto & 3 \longmapsto & 1 \\ 3 \longmapsto & 2 \longmapsto & 3 \end{array}$$

1 se sa σ_2 slika u 1, 1 se sa ρ slika u 2.

2 se sa σ_2 slika u 3, 3 se sa ρ slika u 1.

3 se sa σ_2 slika u 2, 2 se sa ρ slika u 3.

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 : \begin{matrix} 1 \mapsto & 1 \mapsto & 2 \\ 2 \mapsto & 3 \mapsto & 3 \\ 3 \mapsto & 2 \mapsto & 1 \end{matrix}$$

1 se sa σ_2 slika u 1, 1 se sa σ_1 slika u 2.

2 se sa σ_2 slika u 3, 3 se sa σ_1 slika u 3.

3 se sa σ_2 slika u 2, 2 se sa σ_1 slika u 1.

$$\sigma_3 \circ \sigma_1 : \begin{matrix} 1 \mapsto & 2 \mapsto & 2 \\ 2 \mapsto & 1 \mapsto & 3 \\ 3 \mapsto & 3 \mapsto & 1 \end{matrix}$$

1 se sa σ_1 slika u 2, 2 se sa σ_3 slika u 2.

2 se sa σ_1 slika u 1, 1 se sa σ_3 slika u 3.

3 se sa σ_1 slika u 3, 3 se sa σ_3 slika u 1.

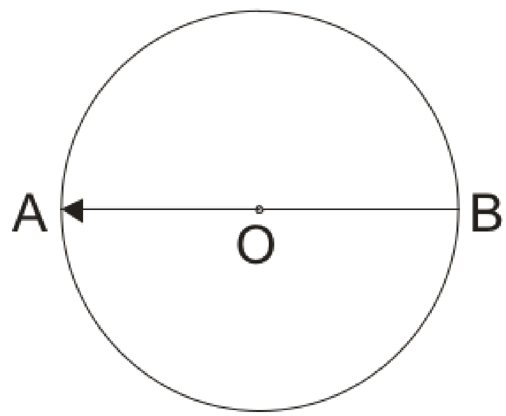
Analogno se dobijaju i ostale kompozicije i tako je dobijena cela tablica.

Grupa rotacija i simetrija se zove diedarska grupa i obeležava se sa $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

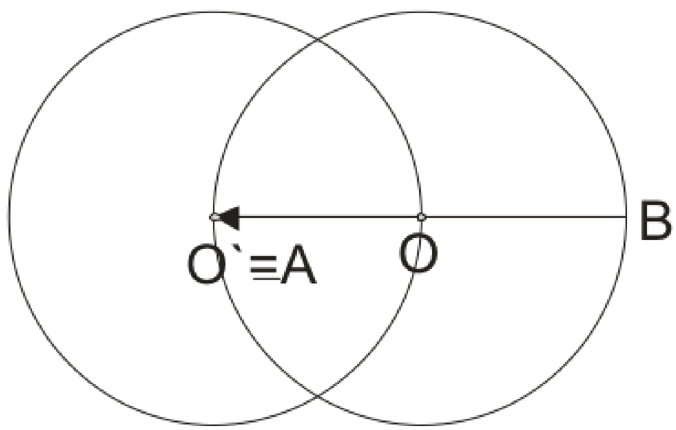
11. Data je kružnica $k(O, r)$ sa prečnikom AB. Odrediti translacije koje preslikavaju :

a) tačku O u tačku A
b) tačku A u središte poluprečnika OB
c) tačku B u datu tačku M na kružnici.

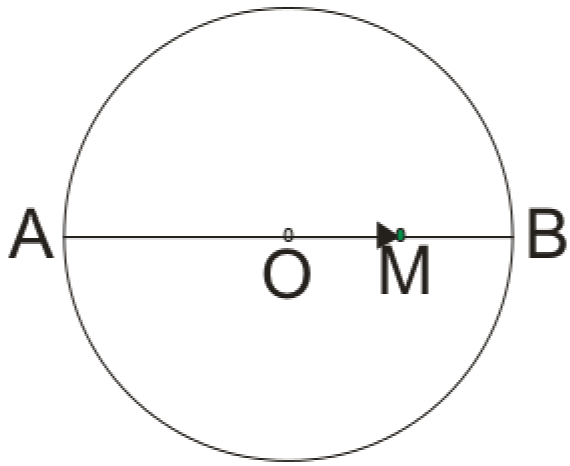
a)



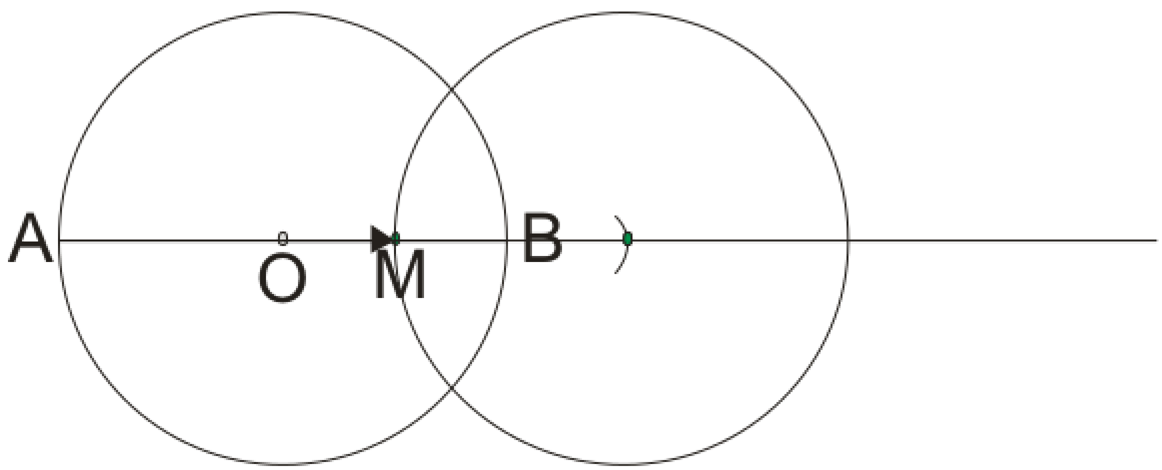
Kod translacije kružnice dovoljno je preslikati njen centar a poluprečnik ostaje isti.



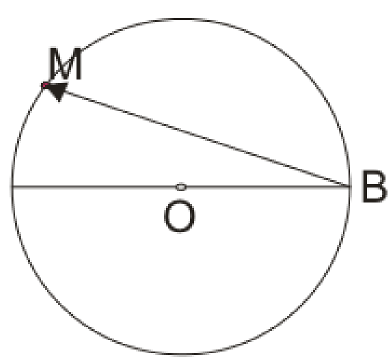
b)



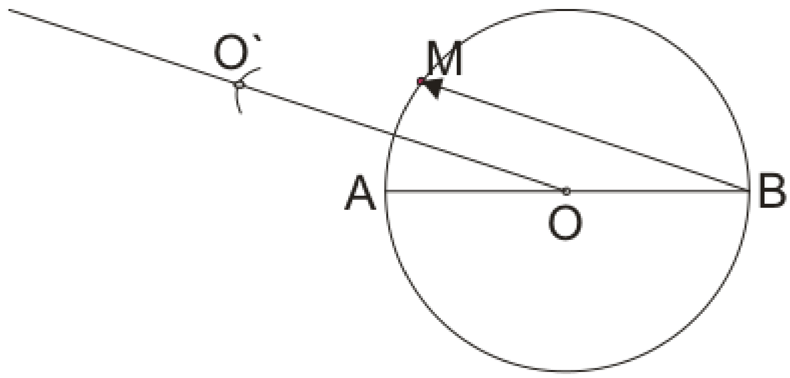
Neka je M središte poluprečnika OB.
Tačka A se translira i dobija se tačka $A', A' \equiv M$.
Poluprečnik kružnice ostaje isti.



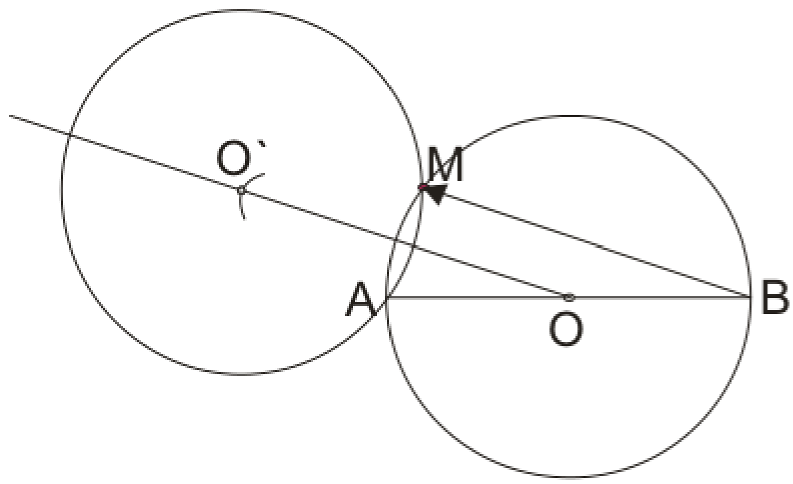
c)



Neka je M proizvoljna tačka na kružnici.



Transliramo duž BM za ugao $\measuredangle ABM$ tako da se B translira u centar O a M u O'.

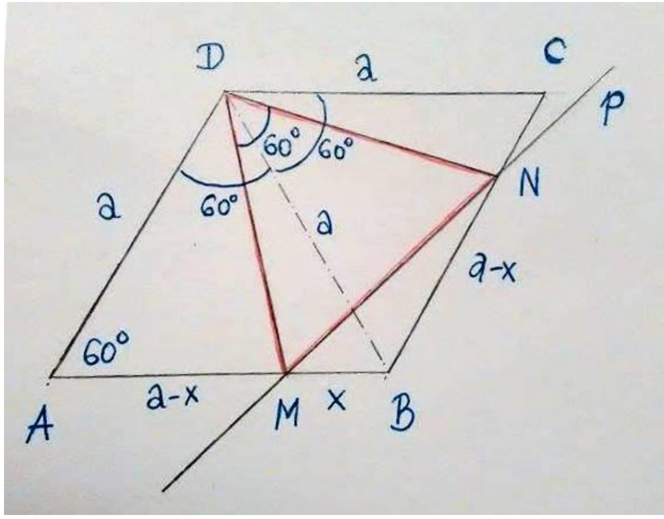


O' je centar kružnice poluprečnika OB.

12.Neka je ABCD romb tako da je ∢BAD=60° i prava p seče redom stranice AB i BC u tačkama M i N redom, tako da je BM+BN=a, pri čemu je a stranica romba.

Dokazati da je ∆ DMN pravilan.

Dokaz:



Iz zadatka imamo :
$p \cap AB=\{M\}$
$p \cap BC=\{N\}$
BM+BN=a;

Označimo BM=x, BN=a-x i AM=a-x.

Kako je AB=AD=a i ∢BAD=60° , sledi da je ovo jednakostaničan trougao, pa je i BD=a i ∢ADB=60°.
Na potpuno analogan način dobijamo da je ∢BDC=60.

Primetimo da važi da
rotacijom tačke A oko tačke D za 60° dobijamo tačku B, jer je ∢ADB=60° i AD=BD=a,
kao i da rotacijom tačke B oko tačke D za 60° dobijamo tačku C, jer je ∢ADB=60° i BD=CD=a.

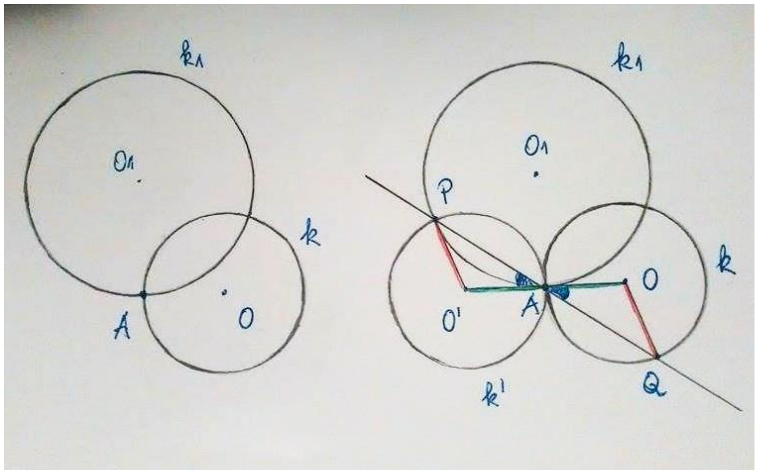
Iz ovoga sledi da se rotacijom duži AB oko temena D za 60° dobija duž BC.

Neka se rotacijom tačke M oko tačke D za 60° dobija neka tačka M'.
Važi da je B(A,M,B) i AM=a-x.
Kako rotacija čuva redosled tačaka i dužine, važi da je B(B, M',C) i B M'=a-x.

Ali, tačka N je definisana tako da je BN=a-x pri čemu je B(B,N,C).
Sada vidimo da je M'=N pa se rotacijom tačke M oko tačke D za 60° u stvari dobija tačka N.
⇨ DM=DN i ∢MDN=60°
⇨ ΔMDN jednakokrak sa uglom od 60°
⇨ ΔMDN je jednakostraničan, tj. pravilan što smo želeli da dokažemo.

13. Data su dva kruga *k* i *k1*sa centrima O i O1, koji se seku. Kroz jednu od tačaka preseka kružnica povući pravu *p* koja na ovim krugovima odseca jednake tetive.

Rešenje:



Ideja je da centralnom simetrijom preslikamo krug *k* odnosu na tačku A, gde je tačka A jedna od dve presečne tačke ovih kružnica..
Dovoljno je preslikati centar O kružnice *k*, a poluprečnik ostaje isti.
Dobijamo kružnicu *k*' i tačku P tako da je 'k' ∩ *k1*={P}.