Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Invarijante

Predmet: Metodika nastave matematike i računarstva

Profesor: dr Nebojša Ikodinović

Studenti:

Aleksandra Ilić 36/2012

Milana Bašaragin 167/2012

Jasmina Vaslijević 20/2012

Rajko Stojanović 80/2012

Aleksandar Filipović 245/2012

Pavle Reljić 243/2012

Decembar, 2015.

UVOD

Mnogi se verovatno nisu susretali sa temom Invarijante tokom učenja matematike u srednjoj školi. Razlog tome jeste to što se ova tema ne obrađuje na redovnoj, već je predviđena za dodatnu nastavu. Dakle, zadaci iz ove oblasti su specifični i namenjeni su učenicima koji žele da saznaju nesto vise o drugim metodama za rešavanje vec viđenih problema i koji žele da se takmiče. Termin invarijanta je nekima poznat iz geometrije, pa tako kad imamo da se prilikom neke izometrijske transformacije određene tačke slikaju same u sebe, onda smo za njih govorili da su to invatijantne tačke. Ne postoji jedinstvena definicija invarijante, ali svima može intuitivno biti jasno da invarijanta predstavlja osobinu posmatranog objekta koja se ne menja pri nekim transformacijama. Uočavanje invarijante nije nimalo lako, naprotiv, vrlo je teško. Najbolji nacin za učenje je rešavanje konkretnih zadataka i što se više zadataka provežba, veća je šansa da ćemo je uočiti kada rešavamo nepoznat problem. Lepo je to da su zadaci iz ove oblasti vrlo kreativni i zanimljivi, pa mogu postati svima ubrzo vrlo interesantni. Mi ćemo vam u ovom radu izložiti one koji su se nama najviše dopali.

ZADACI

1.Data je tabela dimenzije $m \times n$. U svakom polju te tabele nalazi se po jedan ceo pozitivan br oj. U svakom koraku dozvoljene operacije nad tabelom su ili množenje svakog broja iz neke vrste sa dva ili oduzimanje jedinice od svakog broja neke kolone. Pokazati da se primenom ovih koraka polazna tabela može svesti na tabelu koja u svakom svom polju ima nulu.

Rešenje: Osnovna ideja jeste da uočimo invarijantu, i to na sledeći način. Uvedimo oznake $f(x) = 2 * x$ i $g(x) = x - 1$. Kompozicijom ove dve funkcije, primenjenom na jedinicu, dobijamo $g\big(f(1)\big) = f(1) - 1 = 2 * 1 - 1 = 1$. Sada vidimo da je jedinica invarijantna u odnosu na ovo preslikavanje.
Pogledajmo na primeru kako bismo dalje rešili zadatak. Napravimo neku tabelu, recimo:

2	1	5
3	4	2

Uzećemo male brojeve radi lakšeg računa. Krenimo od prve kolone. Kako u njoj nemamo jedinicu, primenjivaćemo funkciju $g(x)$ dok se u nekom polju ne pojavi. U ovom slučaju, nakon jednog koraka dobijamo

1	1	5
2	4	2

Sada, primenimo kompoziciju funkcija od malopre, na novodobijenu jedinicu. Dobijamo tabelu:

1	2	10
1	4	2

Na ovaj način uspevamo da održimo jedinucu u prvoj vrsti dok ne smanjimo broj iz druge vrste takođe na jedinicu. Sledeci korak je da prvoj koloni oduzmemo jedinicu i onda dobijamo:

0	2	10
0	4	2

Sličan postupak se primeni i na ostale dve kolone i tako cemo dobiti traženu tabelu sa svim nulama.

2. Rešiti jednačinu $(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3=x$.

Rešenje: Označimo sa $f(x)=x^2-3x+3$. Osnovna ideja jeste da uočimo da je $f\big(f(x)\big)=x$. To znači da su rešenja polazne jednačine fiksne (invarijantne) tačke funkcije $f°f$. Iz

$$f(x)=x \Rightarrow f\big(f(x)\big)=f(x)=x$$

zaključujemo da su fiksne tačke funkcije $f(x)$ fiksne tačke i funkcije $f(f(x))$. Kada rešimo $f(x)=x^2-3x+3$, dobijamo rešenja $x_1=3$ i $x_2=1$.

Ako $(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3-x$ posmatramo kao polinom, njega možemo podeliti sa $(x-1)(x-3)$. Nakon deljenja dobijamo x^2-2x+1 , odnosno $(x-1)^2$ pa su rešenja jednačine $(x-1)^2=0$, $x_3=x_4=1$.
Dakle, u ovom slucaju imamo dva rešenja polazne jednačine i to su: $x_1=3$, $x_2=1$. U opštem slučaju imali bismo četiri rešenja.

3. Dva niza su zadata sa:

$$x_0=a \qquad x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$
$$y_0=b \qquad y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$$

gde je $0<b<a$
Naći limes ovih nizova.

Rešenje:
Posmatrajmo prvo dva data niza:

- x_{n+1}je aritmetička sredina članova x_n i y_n.
- inicijalno imamo $y_0<x_0$. Ovo će ostati nepromenjeno - invarijanta. Dokažimo to.

  Indukcija po n:
  baza: $y_0<x_0$
  induktivna hipoteza: pretpostavimo da važi $y_n<x_n$
  induktivni korak: dokazujemo da važi $y_{n+1}<x_{n+1}$

  $$\Leftrightarrow \frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}<\frac{x_n+y_n}{2}$$
  $$\Leftrightarrow 4x_ny_n<x_n^2+2x_ny_n+y_n^2$$
  $$\Leftrightarrow 0<(x_n-y_n)^2$$

  po induktivnoj hipotezi je $x_n-y_n>0$, pa prethodno važi.
  Indukcijom smo dokazali da važi $y_n<x_n$ za svako n.
- dakle $y_{n+1}<x_{n+1}$

  $$\Leftrightarrow 0<x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}-\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=$$
  $$\frac{x_n^2+2x_ny_n+y_n^2-4x_ny_n}{2(x_n+y_n)}=$$
  $$\frac{(x_n-y_n)^2}{2(x_n+y_n)}=\frac{x_n-y_n}{(x_n+y_n)}\frac{x_n-y_n}{2}<$$
  $$\frac{x_n-y_n}{2}<\cdots<\frac{x_0-y_0}{2^{n+1}}$$
  $$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$$
  $$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x$$ pod uslovom da oba niza konvergiraju.
- posmatrajmo sada $x_{n+1}y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=x_ny_n=\cdots=ab$

  i to je invarijanta koja će nam pomoći da rešimo zadatak.

  Dokazuje je takođe indukcijom po n
  baza: $x_0y_0=ab$

induktivna hipoteza: pretpostavimo da je $x_n y_n = ab$
induktivni korak: $x_{n+1} y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \frac{2 x_n y_n}{x_n + y_n} = x_n y_n = ab$
dakle $x_{n+1} y_{n+1} = ab$ za svako n

- $x^2 = \lim_{n \to \infty} x_n y_n = ab$, odakle sledi da je $x = \sqrt{ab}$

4. Imamo brojeve od 1 do 10^6 poređane u niz. Svaki od brojeva se menja zbirom svojih cifara. Taj korak se nastavlja dok se u nizu ne dobiju sve jednocifreni brojevi. Da li ima više 1 ili 2?

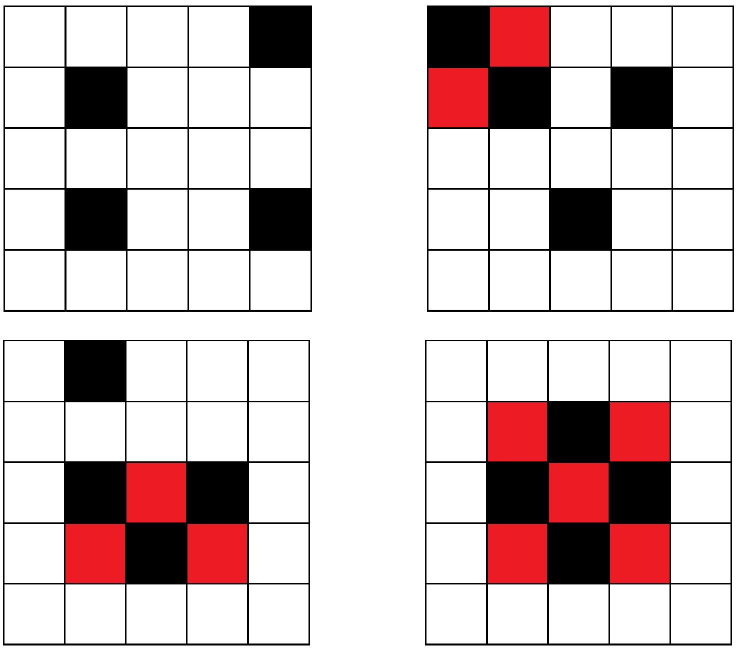
Rešenje: Podsetimo se kada je broj deljiv sa 9 - ako je zbir cifara tog broja deljiv sa 9. Slično, ako broj $n = 1(mod 9)$ to znači da je broj $n - 1$ deljiv sa 9, odnosno da je zbir cifara broja $n - 1$ deljiv sa 9, odnosno da zbir cifara broja n daje ostatak 1 pri deljenju sa 9.
Analogno za ostale moguće ostatke $2, \dots$,8.

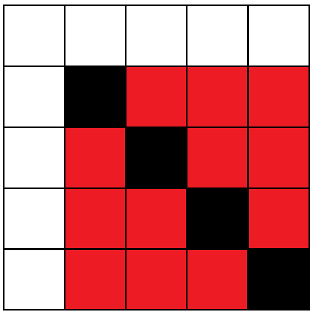
Kako mi posmatramo brojeve od 1 do 10^6, poslednji broj deljiv sa 9 je $10^6 - 1$ (trivijalno jer se sastoji samo od cifara 9) i sa tim se "krug završava". Naime, mi uvek imamo ostatke 1, pa 2, pa 3, itd. pa broj deljiv sa 9 i kad se krug završi imamo jednak broj 1 i 2. Slicno za broj $10^6 - 1$. S obzirom da je broj $10^6 = 1(mod 9)$ sledi da ima veći broj 1 nego 2.

Napomena: invarijanta je bio ostatak broja pri deljenju sa 9.

5. Na kvadratnoj tabli 5×5, četiri polja su obrasla u korov. Svakog dana korov napadne polje koje deli stranicu sa bar dva polja obrasla korovom. Može li da se u konačnom vremenu dogodi da korov zauzme sva polja table?

Rešenje:



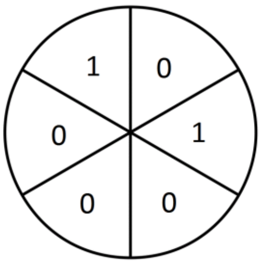


Na slikama je prikazano 5 situacija kako korov napada polja.Crnom bojom su označeni korovi na početku, dok su crvenom označeni korovi koji svakog dana napadaju polja.

Na početku obim polja koja su popunjena korovom na početku je najvise 16. Kad korov napadne neko polje onda obim polja koja su popunjena korovom ostaje isti ili je manji nego početni. Tako da je odgovor na zadato pitanje negativan, tj. obim polja koja su popunjena korovom nikad neće biti 20, što je obim cele table.

6. Krug je podeljen na šest polja. Brojevi 1,0,1,0,0,0 su upisana u polja (tim redom). Na krug možemo delovati tako što povećamo dva susedna za 1. Da li možemo izjednačiti sve brojeve takvim dejstvom ?

Rešenje:



Neka je $I = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6$ gde su $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ redom polja u krugu kao u tekstu zadatka.Na početku na je $I = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2$. Ako povećamo dva susedna polja za po 1, I se ne menja, ostaje 2. Da bi svi brojevi bili isti, I mora da bude 0. Tako da je odgovor na postovljeno pitanje u zadatku negativan.

7. U parlamentu Sikinije, svaki član ima najviše tri neprijatelja. Dokazati da dom može biti podeljen na dva doma tako da svaki član ima najviše jednog neprijatelja u svom domu.

Rešenje: Na početku, podelimo članove na proizvoljan način u dva doma. Neka H bude suma svih neprijatelja koje svaki od članova ima u svom domu. Sada pretpostavimo da član A ima najmanje dva neprijatelja u svom domu, onda on ima najviše jednog neprijatelja u drugom domu. Ako A ode u drugi dom, suma H će se smanjiti. U nekom trenutku, H će dostići svoj apsolutni minimum. Tada smo postigli željenu raspodelu.

U ovom zadatku imamo novu ideju. Konstruišemo pozitivnu funkciju koja se smanjuje u svakom koraku algoritma. Dakle, mi znamo da će se naš algoritam završiti, jer ne postoji beskonačan, strogo opadajući niz pozitivnih celih brojeva. H nije strogo invarijanta, ali se monotono smanjuje dok ne postane konstanta.

8. Svaki od brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ je 1 ili -1 i $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokazati da $4|n$.

Rešenje: Ovo je problem teorije brojeva, ali možemo ga rešiti i pomoću invarijanti. Ako zamenimo a_i sa $-a_i$ suma S se ne menja po modulu 4 sa obzirom da četiri sabirka menjaju znak. Zapravo, ako su dva od ovih sabiraka pozitivna, a dva negativna, onda se ništa ne menja. Ako su tri sabirka istog znaka, onda se suma S menja za ±4. Ako su sva četiri sabirka istog znaka, onda se suma S menja za ±8. Na početku smo imali S=0 iz čega sledi da je S≡0(mod 4). Sada, korak po korak menjamo znak svakog negativnog a_i . Prema prethodnom, S se ne menja po modulu 4 (to je invarijanta). Na kraju imamo da je S≡0(mod 4) , ali i da je S=n iz čega sledi da je n≡0(mod 4) , tj. $4|n$.

9. Kvadratna tablica 3×3 je popunjena brojevima $0,1,\dots,8$ na uobičajen način. U svakom koraku možemo da odaberemo dva susedna polja i brojeve u njima umanjimo za vrednost manjeg, ne menjajuci ostale. Da li se ovakvim izmenama može dobiti tablica popunjena nulama?

Rešenje: Neka su brojevi iz zadatka obojeni kao na tablici broj 1. Razlika zbirova plavih i zelenih brojeva je na početku 1. Ukoliko primenimo jednu izmenu, npr. 1 i 4 dobijamo tablicu broj 2. Razlika zbirova plavih i zelenih brojeva je opet 4. Zaključak je da pri bilo kojoj zameni razlika zbirova ne može biti 0, već je uvek 4 što je invarijanta. Dakle, tablica se ne može popuniti nulama.

0	1	2
3	4	5
6	7	8

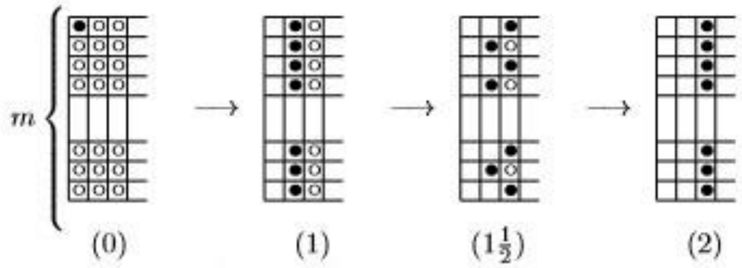
Tablica 1

0	0	2
3	3	5
6	7	8

Tablica 2

10. Na pravougaonoj tabli $M \times N$ se igra sledeća igra sa žetonima čija je jedna strana bela, a druga crna. Na svakom od MN polja se u početku nalazi po jedan žeton i to okrenut na belu stranu, osim žetona u jednom uglu koji je okrenut na crnu stranu. U jednom potezu je dozvoljeno uzeti po jedan žeton okrenut na crnu stranu i pri tome se svi njemu susedni žetoni okrenu. Za koje M i N možemo da uklonimo sve žetone sa table?

Rešenje: Neka je A broj žetona okrenutih na belu stranu, a B broj parova žetona susednih po stranici. Uklanjanjem crnog žetona sa K belih i L crnih suseda, A se smanjuje za за $K - L$, a B za $K + L$, što znači da A+B ne menja parnost.U početku je $A + B = 3MN - M - N - 1$.Ako uspemo da uklonimo sve žetone, na kraju će važiti$A + B = 0$, prema tome$2 \vee 3MN - N - M - 1$, što znači da bar jedan od M, N mora da bude neparan.Sa druge strane, ako je npr. M neparno, možemo postići .Kako na slici, možemo doći do pozicije (1) u M poteza. U $(M+1)/2$ poteza svodimo na poziciju $(1\,, \frac{1}{2})$, pa u sledećih $(M-1)/2$do pozicije (2).I tako dok ne ispraznimo sve kolone.



11. U početku je na tabli ispisano n jedinica.U jednom koraku je dozvoljeno izbrisati dva broja sa table, neka su to x i y, i umesto njih napisati broj $\frac{(x+y)}{4}$.Posle n-1 koraka na tabli će ostati samo jedan broj.Dokazati da taj broj nije manji od$\frac{1}{n}$.

Rešenje: Zbir recipročnih vrednosti svih brojeva na tabli ne raste prilikoom svakog koraka, jer je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ .Taj zbir je u početku jednak n, pa ako na kraju ostane samo broj a, on zadovoljava $\frac{1}{a} \leq n$.