Универзитет у Београду, Математички факултет

Семинарски рад из Методике наставе математике и рачунарства

Комбинаторика

Аутори:
Бранислав Јововић
Јована Недељковић
Маријана Палибрк
Дајана Пановић
Данијел Суботић
Никола Тешић

Ментор:
др Небојша Икодиновић

18.10.2015.

1 Теоријски увод

1.1 Варијације

Пример 1.1. Нека ја дат скуп $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Бирамо 2 елемента из тог скупа без понављања. Добијемо:

$$\{1,2\}\ \{2,1\}\ \{1,3\}\ \{3,1\}\ \{1,4\}\ \{4,1\}\ \{2,3\}\ \{3,2\}\ \{2,4\}\ \{4,2\}\ \{3,4\}\ \{4,3\}$$

и овакав тип груписања елемената зовемо **варијације без понављања** 2-класе.

Слично уводимо варијације 2-класе са понављањем:

$$\{1,2\}\ \{2,1\}\ \{1,3\}\ \{3,1\}\ \{1,4\}\ \{4,1\}\ \{2,3\}\ \{3,2\}\ \{2,4\}\ \{4,2\}\ \{3,4\}\ \{4,3\}$$

$$\{1,1\}\ \{2,2\}\ \{3,3\}\ \{4,4\}$$

У општем случају формула **варијација k-класе без понављања** скупа од n елемената дата је са: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$,
док општа формула за варијације k-те класе са понављањем скупа од n елемената: $\bar{V}_n^k = n^k$.

1.2 Пермутације

Пример 1.2. Нека је дат скуп $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Уколико променимо редослед елемената у скупу S, на пример $\{2, 3, 1, 4\}$ добијамо једну **пермутацију** полазног скупа. Број пермутација у овом случају је 4!
Укупан број различитих пермутација произвољног скупа са n елемената дат је формулом: $P(n) = n!$
Нека је дат скуп S са n елемената. Сваки низ дужине $k_1+k_2+...+k_n = m$ у коме се i-ти елемент скупа S појављууј k_i пута назива се **пермутацијом са понављањем** скупа S типа $(k_1, ...k_n)$. Број описаних пермутација једнак је: $P_{k_1,...,k_n}(m) = \frac{m!}{k_1!k_2!...k_n!}$.

1.3 Комбинације

Пример 1.3. Нека ја дат скуп $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Бирамо 2 елемента из тог скупа без понављања. Добијемо: $\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{1,4\}\ \{2,3\}\ \{2,4\}\ \{3,4\}$ и овакав тип груписања елемената зовемо **комбинације без понављања** 2-класе.
Нека је дат скуп S који има n елемената. Подскуп од k елемената скупа S називамо комбинацијом класе k од n елемената. Укупан број комбинација k-те класе без понављања је $\frac{V_n^k}{k!}$.
Пример 1.4. Нека је дат скуп $S = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$. Бирамо k елемената тог скупа са враћањем. Ако није битан редослед већ само колико пута је који елемент изабран резултат тога називамо **комбинацијама са понављањем** k-класе. Број тих комбинација је: $\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

Да ли су изабрани сви елементи почетног скупа ?	Да ли је битан поредак међу изабраним елементима?		Формуле за рачунање
ДА	**ДА**	Пермутације	Без понављања $P(n) = n!$
			Са понављањем $P(n, m_1, m_2, m_3, ..m_k) = \frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot m_3!\cdots m_k!}$
НЕ	**ДА**	Варијације	Без понављања $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
			Са понављањем $\overline{V_n^k} = n^k$
НЕ	**НЕ**	Комбинације	Без понављања $C_n^k = \binom{n}{k}$
			Са понављањем $\overline{C_n^k} = \binom{n+k-1}{k}$

2 Задаци

1) Колико дијагонала има у n-тоуглу?

   Решење: Сваку од n тачака можемо да повежемо са $n-3$ тачке јер не можемо да је повежемо саму са собом, а ако је повежемо са неком од суседне две тачке, то неће бити дијагонала него страница. Овим методом смо све дијагонале урачунали по два пута, па је решење $\frac{n(n-3)}{2}$.

2) Желимо да телефонирамо пријатељу, чији смо број телефона заборавили, а сећамо се да је шестоцифрен и не почиње нулом. Колико позива бисмо морали да обавимо у најгорем случају да бисмо добили нашег пријатеља?

   Решење: Укупно имамо $9 \cdot 10^5$ могућности јер за прву цифру имамо 9 могућности (не може да буде 0), а на осталих 5 места имамо по 10 могућности. У најгорем случају пријатеља ћемо звати последњег, па ћемо направити управо $9 \cdot 10^5$ позива.

3) Колико има седмоцифрених бројева, таквих да је на парном месту паран број, а на непарном непаран?

   (а) Цифре се понављају.

   (б) Цифре се не понављају.

   Решење:

   (а) На првом, трећем, петом и седмом месту можемо да ставимо 1, 3, 5, 7 и 9 - по 5 опција, а на другом, четвртом и шестом месту можемо да ставимо 0, 2, 4, 6 и 8 - такође 5 могућности. Множењем свега тога добијамо да је решење 5^7.

   (б) На прво и друго место можемо да ставимо по 5 цифара, јер су још увек све цифре слободне. На треће и четврто место можемо да ставимо по 4 цифре јер по једну цифру заузимају прво и друго место. Слично, на пето и шесто место можемо да ставимо по 3 цифре, а за седмо место имамо само 2 могућности. Одатле добијамо да је решење $5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 7200$.

4) Колико има петоцифрених бројева, тако да су цифре у строго растућем поретку?

   Решење: Означимо са $S = \{1, 2, ..., 9\}$ скуп цифара које се могу наћи у одговарајућем петоцифреном броју. Цифре су поређане строго растуће што значи да се у оквиру одговарајућег броја оне не могу понављати.

Приметимо следећу ствар:
Како год да одаберемо 5 цифара из скупа S, оне одређују тачно 1 петоцифрен број коме су цифре поређане строго растуће. Нпр:

Ако одаберемо:	Добијамо
3,2,4,1,8	12348
9,2,7,5,6	25679
1,2,7,5,6	12567
9,8,7,5,2	**25789**
8,9,2,5,7	**25789**

Обратимо пажњу на последња два реда. Редослед одабира елемената није важан! То нам омогућава да закључимо следећу ствар:
Број петоцифрених бројева са цифрама поређаним у строго растућем поретку једнак је броју комбинација без понављања пете класе скупа од 9 елемената, односно $\binom{9}{5}$.

5) Колико различитих речи се може саставити од:

   (а) МЕТОДИКА,

   (б) КОМБИНАТОРИКА.

   Решење:

   (а) У речи МЕТОДИКА имамо 8 различитих слова, па од њених слова можемо добити 8! речи јер постоји толико пермутација.

   (б) Реч КОМБИНАТОРИКА има 13 слова. Четири (К, О, И и А) се појвљују по два пута, а пет слова (М, Б, Н, Т и Р) појављују се по једном, па укупно имамо $\frac{13!}{(2!)^4}$ различитих речи.

6) Колико има природних бројева не већих од 1000, таквих да су дељиви са бар једним од бројева: 2, 3, 5?

   Решење: Означимо са A, B, C скуп бројева који су дељиви са 2, 3, 5 редом. Тражи се број елемената скупа $A \cup B \cup C$. Ако се израчуна збир $|A|+|B|+|C|$ онда су у том збиру два пута урачунати бројеви дељиви са 6, 10, 15 зато од збира $|A|+|B|+|C|$ треба одузети $|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$. Но тиме су елементи дељиви са 30 потпуно искључени па број $|A\cap B\cap C|$ треба додати да би се добио крајњи резултат:

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|C\cap B|+|A\cap B\cap C| =$$

$$= 500+333+200-166-66-100+33 = 734.$$

7) У посластичарници служе 5 различитих врста сладоледа: чоколада, ванила, лешник, вишња, јагода. На колико начина мали Бане може да одабере куп са три кугле (не обавезно различите)?

Решење: Означимо са k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 број кугли сваке од врста редом. Колико има различитих решења једначине

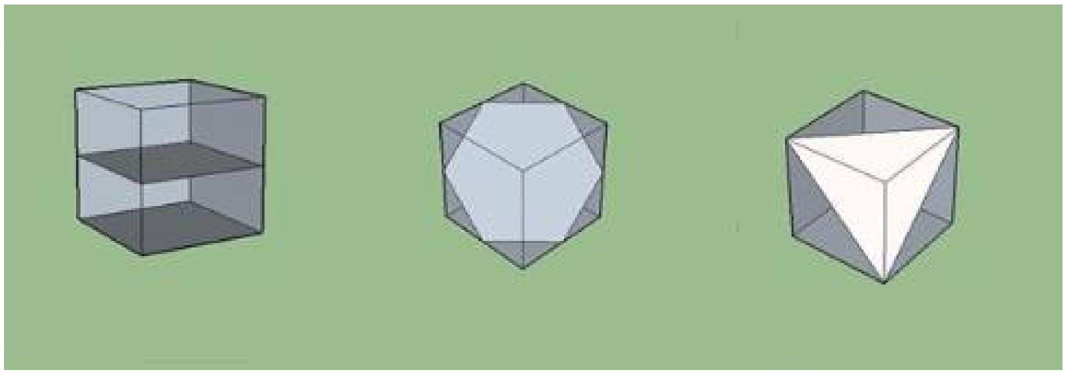
$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 3$$

заправо представља тражени број начина. По формули за број комбинација са понављањем добијамо да је решење: $\binom{5+3-1}{3} = 35$.
(*Образложење:*
Ако 3 куглице и 4 преграде посматрамо као уређену седморку, онда скуп свих њихових пермутација са понављањем типа $(3, 4)$ одговара скупу решења једначине

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 3,$$

где k_1 представља број куглица пре прве преграде, k_2 број куглица између прве и друге преграде, ... , k_5 број куглица после четврте преграде, а таквих пермутација има $\binom{5+3-1}{3}$).

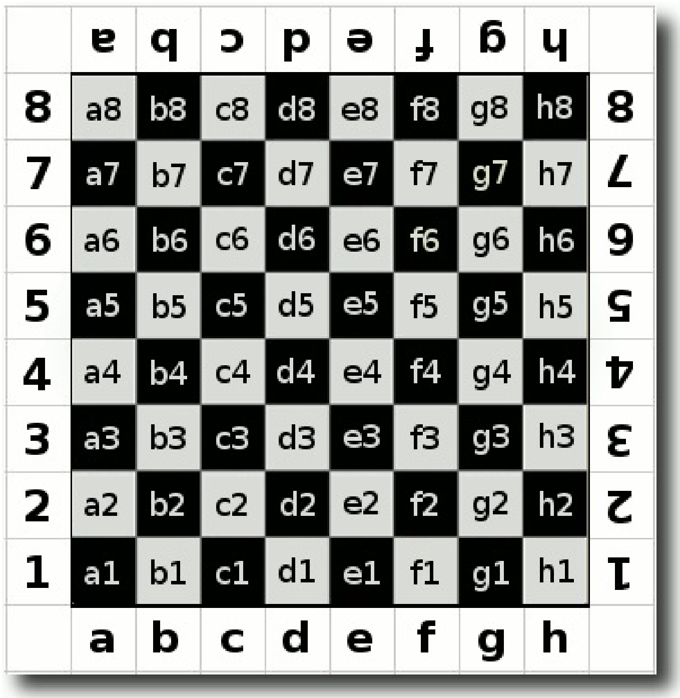
8) Да ли је могуће коцку пресећи неком равни, тако да је пресек правилан петоугао?



Решење: Приметимо да у коцки постоје три стране међу којима нема паралелних, означимо их са a, b, c. Претпоставимо да је могуће пресећи коцку неком равни, тако да је пресек правилан петоугао. У пресеку добијамо пет дужи - ивица петоугла - од којих је свака паралелна једној од страна a, b, c. Но, како свакој од пет дужи је додељена једна од три стране a, b, c (којој је паралелна), постоји страна којој су паралелне бар две дужи што је у супротности са претпоставком да је петоугао правилан (нема пар паралелних ивица).

9) Скакач је на шаховској табли на пољу $A1$. Може ли скакач да обиђе сва поља тачно једном, а да се на крају нађе на пољу $H8$?

Решење: Пошто на свако поље може да стане тачно једном, потребно је 63 потеза. Приметимо да се после сваког потеза мења боја поља на коме се налази. Како је 63 непаран број, а $A1$ црно поље (као што се може видети на слици), то скакач мора да заврши на белом пољу, али(!) $H8$ је црно поље, дакле није могуће обићи таблу на тражени начин.



10) Дванаест девојака и пет момака желе да заузму 17 места у реду за биоскопске карте. Како би им био занимљивији провод, желе да стану тако да ниједан момак не стоји поред другог момка. На колико начина могу да се распореде?

Решење: Нека прво 12 девојака стане у ред, оне то могу урадити на 12! начина. Сада, како желимо да задовољимо услов да ниједан момак не стоји поред другог, довољно је да први од момака заузме било које од 13 могућих места (тачно толико места има између 12 девојака + још места пре прве и после последње). Други момак има сад "у понуди" 12 могућих места, трећи - 11, четврти - 10, пети - 9. Таквим поступком смо попунили свих 17 места под траженим условом. И свега имамо

$$12! \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{12! \cdot 13!}{8!}.$$

11) Одредити коефицијент уз $a^k b^{n-k}$ у $(a+b)^n$, где је $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Решење: Напишимо $(a+b)^n$ у облику

$$(a+b) \cdot (a+b) \cdot ... \cdot (a+b),$$

где се $(a+b)$ појављује n пута. Пошто се сваки множи са сваким: $a^k b^{n-k}$ добијамо тако што из k чинилаца изаберемо a, а из преосталих $n-k$ бирамо b. Таквих избора има $\binom{n}{k}$.

12) У минском пољу налази се 25 мина, тако да за произвољне три од њих постоје 2 чије је растојање мање од 3 метра. Деминер може да деминира свако поље, осим поља у ком су мине толико концентрисане да постоји круг полупречника 3 метра у ком постоји бар 13 мина. Доказати да деминер није способан да очисти ово минско поље.

    Решење: Нека је A произвољна од датих мина и k_1 круг са центром A и полупречником $3m$. Ако се све мине налазе унутар круга k_1, тврђење је доказано. У противном постоји мина B која није унутар круга k_1, тј. таква да растојање између мина A и B није мање од $3m$. Нека је k_2 круг са центром B и полуречником $3m$. Свака од датих 25 мина налази се унутар круга k_1 или унутар круга k_2. Заиста, ако би постојала мина C која није унутар ниједног од тих кругова, онда међу минама A, B, C не би постојале 2 мине чије је растојање мање од $3m$, што је противно услову задатка. Сада на основу Дирихлеовог принципа добијамо да се унутар бар једног од кругова k_1 и k_2 налази бар 13 мина, па деминер заиста није способан да очисти ово минско поље.